Relatos de investigación y experiencias docentes III en educación matemática

Año
2017

Compilador
Pochulu, Marcel David

3.

RELATOS DE INVESTIGACIÓN Y EXPERIENCIAS DOCENTES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Coordinador y compilador:

Marcel David Pochulu

FEBRERO
2018

Universidad Nacional Villa María

GIDED
GRUPO DE INVESTIGACIONES Y DESARROLLOS DIDÁCTICOS

Relatos de investigación y experiencias docentes III : en educación matemática / Marcel David Pochulu ... [et al.] ; compilado por Marcel David Pochulu. - 1a ed . – Villa María : GIDED, 2018.

Libro digital, PDF - (Relatos de investigación y experiencias docentes / Civarolo, María Mercedes; Lizarriturri, Sonia Gabriela; 3)

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-42-7307-9

1. Matemática. 2. Educación Científica. 3. Metodología. I. Pochulu, Marcel David II. Pochulu, Marcel David, comp.

CDD 371.1

Referatos de esta edición:

Dra. Mabel Rodríguez (Universidad Nacional de General Sarmiento)

Mgter. Ana María Ruiz (Universidad Nacional de San Juan)

ISBN 978-987-42-7307-9

9 789874 273079

Índice

Prólogo

Presentamos un nuevo volumen de la serie Relatos y experiencias docentes, esta vez en Educación Matemática, son productos de trabajos desarrollados en el marco del proyecto de investigación *Configuraciones de clases de Matemática: estilos, comprensión de objetos matemáticos e implicancias educativas*, el cual nuclea a los autores. Estos relatos están pensados para el profesor que no necesariamente hace investigación, pero está preocupado por la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Nuestro propósito es brindar algunas herramientas para llevar al aula, pensar y reflexionar sobre ellas, con la intención que puedan ser el punto inicial de nuevas y renovadas propuestas de clase.

En el primer capítulo de este libro, nos centramos en el análisis sobre cuáles son las configuraciones de clases de matemática que se pueden reconocer en el nivel superior y las tareas y estrategias de enseñanza que privilegian los profesores de matemática. El estudio se basó en la observación, análisis e interpretación de las prácticas docentes de profesores que desarrollaron sus actividades en cátedras del área de matemática en tres instituciones de nivel superior y universitario de la ciudad de Villa María (Córdoba, Argentina), durante los años académicos 2014, 2015 y 2016.

En el segundo capítulo, proponemos un abordaje teórico sobre las narrativas pedagógicas como herramientas para valorar la comprensión que alcanzan los estudiantes sobre los objetos involucrados en un conjunto de prácticas matemáticas. Relacionado con este marco de referencia, el tercer capítulo muestra un ejemplo de análisis de narrativa, buscando poner en evidencia la importancia que tiene la herramienta no solo para el estudiante, sino también para el docente, a quien le permite realizar una evaluación continua y permanente del avance del estudiante y del proceso de enseñanza.

En el cuarto capítulo, se describe el modo en que se ve favorecido el desarrollo de competencias en análisis didáctico por parte de un grupo de profesores de matemática, mientras realizaban un curso de formación docente sobre Divisibilidad. Para ello, se propusieron y desarrollaron *tareas profesionales* que tienen como objetivo realizar análisis didácticos, con base en las herramientas teóricas que fueron emergiendo en el curso de formación en el que participaron.

El quinto capítulo se encamina en mostrar distintos problemas de Divisibilidad y Teoría de Números que pueden oficiar de disparadores para trabajar en clase sobre estos objetos matemáticos. Se plantea la relevancia de cada uno de ellos, y se muestran distintos caminos de resolución que puedan llevar a cabo los estudiantes y los procesos cognitivos que intervienen. El escrito busca enfatizar la importancia de trabajar con problemas que admitan diferentes opciones de resolución y exploración, argumentando, tomando decisiones, utilizando distintas herramientas y validando cada estrategia elegida.

En el sexto capítulo, nos enfocamos en reflexionar sobre la importancia de la interdisciplinariedad como un modo de relacionar dentro del aula a la matemática con disciplinas que necesitan de sus herramientas, tales como la biología, la física o la química. Los avances tecnológicos y las interconexiones que se realizan entre los distintos campos profesionales de la ciencia no dejan exenta a la matemática, y exigen que los profesores lleven a las aulas problemáticas actualizadas, donde los alumnos puedan ver la conexión y el aporte que la matemática realiza en todas las demás ciencias, puesto que ya no basta con enseñar solamente técnicas y algoritmos.

Hacia el séptimo capítulo nos abocamos a situaciones dentro del campo de la Estadística. Se plantea aquí la problemática de aplicar métodos algorítmicos en la enseñanza del análisis de datos y la probabilidad, y se busca dar respuesta por medio de una reformulación de los instrumentos didácticos para utilizar en las clases. Se pone a consideración un dispositivo de carácter dinámico y colaborativo, organizado en torno a la utilización de un software específico para el análisis de datos, además de la combinación con distintos soportes digitales (archivos colaborativos *online* y redes sociales) para una mayor interacción entre los estudiantes y los docentes.

En el octavo capítulo presentamos un trabajo exploratorio acerca de las concepciones iniciales que tienen futuros Profesores de Matemática sobre la probabilidad al aplicar el enfoque clásico o laplaciano. Para ello se estudiaron las prácticas operativas y discursivas de estudiantes del Profesorado en Matemática al resolver tres tareas que implicaron la asignación de probabilidades a espacios muestrales equiprobables. El análisis se efectuó empleando las herramientas configuración epistémica y configuración cognitiva del Enfoque

Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática. Los resultados evidencian falencias para reconocer espacios equiprobables y para interpretar el resultado obtenido según el tamaño de la muestra, lo cual guarda correspondencia con los estudios realizados por diferentes investigadores sobre Educación Estadística.

El noveno capítulo plantea la problemática que se le presenta al profesor al abordar contenidos que lleven a transitar de la Aritmética al Álgebra. Nos centramos en la actividad de diseñar buenas tareas para tal fin y le agregamos la necesidad de valorar la comprensión que alcanzan los estudiantes en estos temas. Para ello, se proponen dos tareas, las cuales son analizadas y comentadas a la luz de referentes teóricos, con la finalidad de que sirvan como ejemplos para seguir pensando en la clase de Álgebra.

Por último, el décimo capítulo presenta un marco epistémico y didáctico de referencia para el cálculo del área de figuras compuestas. En primera instancia discutimos y reflexionamos sobre la complejidad del tema, revisamos la literatura, investigaciones en Educación Matemática y diseños curriculares, entre otros documentos. Puntualmente, proponemos un conjunto de indicadores de idoneidad epistémica para el diseño o la valoración de tareas sobre el cálculo del área de figuras compuestas, y una serie de consignas que se ajustan a los principios enunciados, con un análisis didáctico de las mismas.

Todos los capítulos son el resultado de mucho trabajo y reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Es nuestro anhelo que pueda ser útil y claro para los profesores en formación, como así también, para todos aquellos que buscan enriquecer día a día sus prácticas de enseñanza, incorporando resultados de investigaciones en Educación Matemática.

1

Configuraciones de clases de matemática en el nivel superior

Marcel David Pochulu y Raquel Susana Abrate

1.1. Introducción

La enseñanza de la matemática en el nivel superior plantea grandes desafíos para los profesores, pues las tendencias en educación matemática marcan que debería enseñarse de manera contextualizada, a través de la resolución de problemas, con uso de nuevas tecnologías, entre otras características. En Argentina, la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU) establece, entre otras condiciones, que el plan de estudios de cada carrera debiera estar adecuadamente integrado para lograr el desarrollo de las competencias necesarias para la identificación y solución de problemas abiertos por parte de los estudiantes. Para el Ministerio de Educación (2001), los problemas abiertos se entienden como aquellas situaciones reales o hipotéticas que plantean los profesores a sus estudiantes y son considerados, al mismo tiempo, como un indicador más de la calidad educativa que brinda la universidad.

Existen numerosos trabajos referidos a la enseñanza de la matemática donde se proponen algunos principios y lineamientos generales para la clase, con la finalidad de lograr desarrollar capacidades o competencias específicas en los estudiantes. A su vez, se tienen trabajos centrados en el análisis del tipo de tareas que los profesores proponen a los estudiantes, pues se consideran clave para conseguir una enseñanza de calidad (por ejemplo, Mason & Johnston-Wilder, 2004; Tzur, Sullivan & Zaslavsky, 2008; Zaslavsky & Sullivan, 2011).

Estas investigaciones pusieron el foco en diferentes aspectos. Por ejemplo, Swan (2007) estudió la naturaleza y tipología de tareas; Stein, Smith, Henningsen & Silver (2000) y Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011), las características que debe cumplir una tarea para ser estimulante o retadora para el alumno; Charalambus (2010), el papel que tiene el profesor en la implementación de la tarea a fin de lograr un proceso cognitivo relevante en los alumnos; Giménez, Font y Vanegas (2013), el diseño de tareas en la formación de futuros profesores de matemática de secundaria; Pochulu, Font y Rodríguez (2016), el análisis y diseño de tareas en profesores de profesores para promover un estilo de enseñanza acorde con los lineamientos curriculares.

Si bien el tipo de tareas condiciona la actividad de la clase, se sabe que resulta clave la gestión que el profesor logra hacer de ella. Por tal razón, las diferentes líneas y enfoques teóricos de educación matemática se preocupan por establecer pautas y criterios para el diseño de prácticas instruccionales idóneas. En este contexto y situados en el nivel superior, surgen como interrogantes: ¿Cuáles son las configuraciones de clases de matemática que se pueden reconocer en el nivel superior? ¿Cuáles son las tareas y estrategias de enseñanza que privilegian los profesores de matemática del nivel superior?

En este trabajo se entiende a una configuración de clase como "la disposición, distribución, organización y tratamiento que efectúa el profesor de las distintas instancias y momentos que componen una clase y que le otorgan características particulares y distinguibles de las demás" (Pochulu, 2007, p. 22).

1.2. Sobre el diseño metodológico

El diseño metodológico de toda la investigación se basó en la observación, análisis e interpretación de las prácticas docentes de profesores que desarrollaron sus actividades en cátedras del área de matemática de la Universidad Nacional de Villa María (UNVM), Universidad Tecnológica Nacional, Regional Villa María (UTN-FRVM) y en el Instituto de Educación Superior del Centro de la República (INESCER), durante los años académicos 2014, 2015 y 2016, de acuerdo con lo detallado en la Tabla 1:

Tabla 1: Cátedras cuyas prácticas docentes fueron analizadas

N° de Profesores	Cátedra	Carrera	Institución
5	Álgebra	Contador Público y Licenciatura en Administración	UNVM
3	Geometría I	Profesorado en Matemática	UNVM
2	Análisis Numérico	Profesorado en Matemática	UNVM
1	Matemática Discreta	Profesorado en Matemática	UNVM
1	Análisis Matemático	Ingeniería en Tecnología de los Alimentos	UNVM
2	Análisis Matemático	Licenciatura en Administración Rural	UTN-FRVM
2	Matemática	Profesorado de educación secundaria de la modalidad técnico profesional en concurrencia con título de base	INESCER
1	Matemática	Tecnicatura Superior en Gestión y Administración de las Organizaciones	INESCER

Para realizar el análisis de las prácticas docentes de matemática en el nivel superior, se realizaron filmaciones de clases, entrevistas semiestructuradas con estudiantes y profesores, y se analizaron carpetas e instrumentos de evaluación. A su vez, se utilizaron:

(a) Los constructos de configuración epistémica, instruccional y cognitiva, junto a la noción de trayectoria docente (modo en que se distribuyen las tareas o acciones docentes a lo largo de la clase) que propone el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino (2000, 2003) y colaboradores. En particular, se analizó el modo en que se articulan los objetos primarios que componen una práctica o actividad matemática: situaciones problemas, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje. Para el EOS, los seis objetos primarios se relacionan entre sí formando configuraciones, las que son entendidas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas -junto a las relaciones que se establecen entre los mismos- y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular. A su vez se valoró la idoneidad didáctica del proceso de estudio considerando los indicadores que propone Godino, Contreras y Font (2006) para las seis facetas (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica).

(b) La noción de escenario de investigación propuesta por Skovsmose (2012, p. 111) desde la Educación Matemática Crítica, quien lo define como "una situación particular que tiene la potencialidad de promover un trabajo investigativo o de indagación" en los estudiantes. Además, describe distintas tipologías de clases de matemática al realizar un cruce entre dos dimensiones: el paradigma del ejercicio y el enfoque investigativo. Hace una distinción con el primero (paradigma del ejercicio), donde se situaría la clase tradicional de matemática, propone el trabajo en la clase organizando proyectos que se montan sobre escenarios de investigación. Asimismo, advierte que un escenario de investigación debe promover en los estudiantes la formulación de preguntas, la búsqueda de explicaciones, la posibilidad de explorar y explicar las propiedades matemáticas, etc. Todo esto está condicionado por el tipo de problema, tarea o actividad que se les proponga y obviamente, la gestión de la clase que realice el profesor. Cabe hacer notar que esta noción guarda relación con los recorridos de estudio e investigación que plantea Chevallard (2013), donde el corazón de la enseñanza está en la dialéctica de preguntas y respuestas.

Para establecer las configuraciones de clases se crearon convergencias entre los diferentes aspectos que conformaron las dimensiones de análisis, tratando de encontrar las características comunes que se presentaban entre las prácticas de los docentes.

1.3. Algunos resultados

Se reconocieron seis configuraciones de prácticas docentes de matemática en el nivel superior, las cuales guardan relación con el modo en que se articulan los objetos primarios de una práctica, las estrategias privilegiadas por los profesores y el tipo de tareas que proponen. Dos configuraciones fueron tipificadas en adidácticas y cuatro en magistrales (ver Figura 1), de acuerdo con la caracterización que proponen Godino, Contreras y Font (2006) en dialógica, personal, magistral y adidáctica.

La numeración de 1 a 6 se corresponde con clases que presentan una mayor idoneidad didáctica (la 1) a una menor idoneidad didáctica (la 6), de acuerdo con la valoración realizada con los criterios que proponen Godino, Contreras y Font (2006).

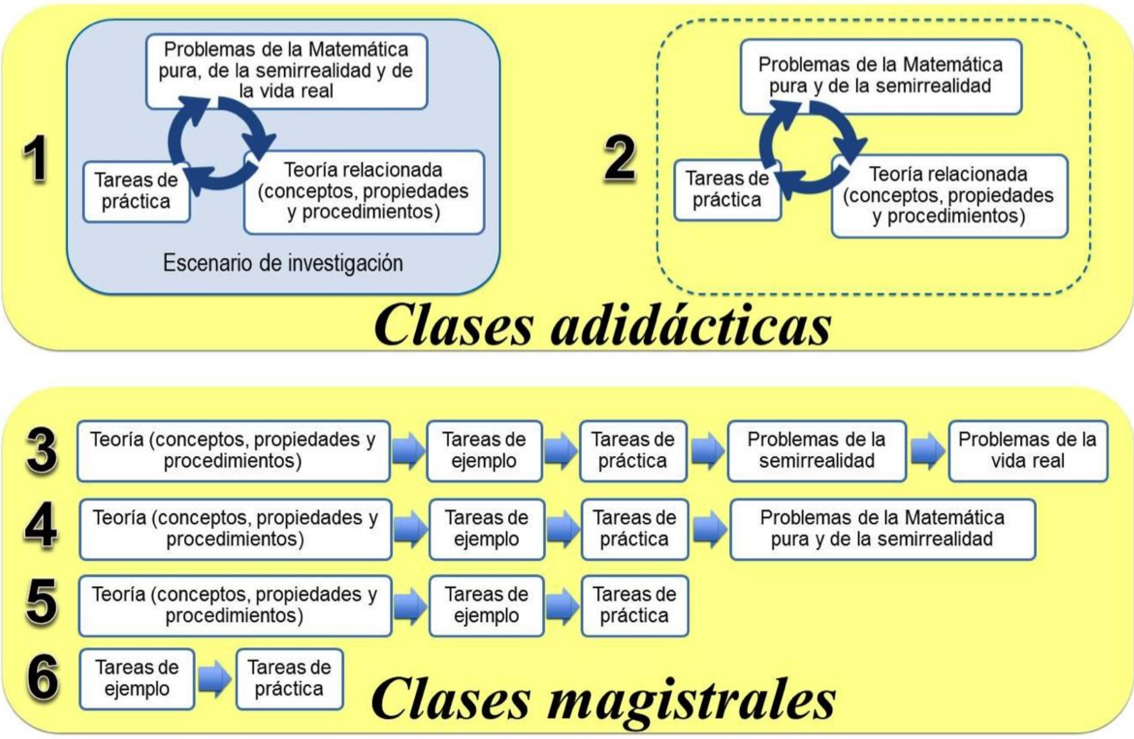


Figura 1: Configuraciones de prácticas docentes en el nivel superior

Las clases de tipo 1 se llevan a cabo en escenarios de investigación en los cuales se resuelven actividades que abordan temáticas de interés para los estudiantes, en tanto refieren a problemáticas inherentes a su área de estudio. La resolución de estas actividades surge como necesidad de dar respuesta a interrogantes que el profesor solicita que se formulen en relación con el contenido que pretende enseñar, pero que no explicita (por ejemplo: ¿Cuál es la dinámica poblacional de una colmena? ¿A qué edad se sacrifica un pollo para consumirlo?); aunque hay un contenido que el profesor pretende enseñar, el alumno no lo percibe. Por esta razón, para obtener resultados positivos, el alumno se ve obligado a explorar, indagar, formular conjeturas, construir modelos, validarlos. En este tipo de clase hay una redistribución de responsabilidades, el profesor deja de ser el único poseedor del saber y los estudiantes pueden aportar nuevas preguntas y puntos de vista a las tareas y actividades.

Las clases de tipo 2 heredan las características anteriores, pero es el profesor quien propone la temática (de la matemática pura o de la semirrealidad) y desarrolla las actividades y tareas de la clase con el acompañamiento de los estudiantes. En este caso, no queda el escenario de investigación al mando de los estudiantes, sino que es responsabilidad del profesor.

La clase de tipo 3 podríamos considerarla una "buena" clase tradicional, pues si bien se organiza de manera conservadora (primero la teoría y luego aplicaciones prácticas), posee el plus de contar con actividades enmarcadas en problemas de la semirrealidad y, aunque sea a modo de muestra, con alguna actividad extraída del contexto real. Con problemas de la semirrealidad aludimos a tareas que parecieran ser realistas por tener datos de uso cotidiano, pero que tienen como único fin resolver ejercicios matemáticos rutinarios.

La clase de tipo 4 se parece a la de tipo 3, pero se queda solo en contextos de la matemática pura y de la semirrealidad. Este tipo de clase son las más habituales y tienen esquemas parecidos a los presentados en algunos libros de matemática del nivel superior, donde primero se exponen los componentes teóricos rigurosamente y con posterioridad, aplicaciones prácticas de lo trabajado.

La clase de tipo 5 es la que se alinea con clases de baja idoneidad didáctica debido a su modo de organización y complejidad de las tareas. Prescinden de la resolución de tareas desafiantes y se limitan a mostrar métodos y algoritmos de cálculo de la matemática aplicados a actividades puntuales. Es de destacar que este tipo de clases suele ser de la preferencia de los estudiantes, en tanto tienden a aumentar la confianza en sus habilidades para enfrentar las tareas. Esto se debe a que solo requiere que se aprendan ciertos algoritmos y procedimientos fundamentales para ser aplicados en problemas sencillos y rutinarios, alejados de toda realidad cotidiana.

La clase de tipo 6 solo se basa en actividades que ejemplifican la teoría, que no es siquiera suministrada por el profesor y menos aún construida por el alumno. En este tipo de clase es frecuente que el profesor prescinda de la rigurosidad que caracteriza al lenguaje matemático y las definiciones sean sustituidas por casos particulares. Por ejemplo, expresar que "las ecuaciones lineales son igualdades entre dos expresiones como las siguientes…"; "Una matriz es una tabla de doble entrada de números consistente en cantidades abstractas que pueden sumarse y multiplicarse entre sí, como la siguiente…".

A su vez, estas configuraciones de clases enfatizaron algunos aspectos que fueron distinguidos por los estudiantes y que les otorga una característica particular, como se describen a continuación:

<u>Clases con énfasis en la participación de los estudiantes</u>: Presente en algunas de las configuraciones 1, 2 y 3. Existe una clara intención por parte del profesor de propiciar espacios de análisis, reflexión y discusión con los estudiantes, estimulándolos para que pregunten y debatan sobre los objetos matemáticos involucrados. Estas clases se caracterizan por tener una alta idoneidad emocional, cognitiva e interaccional. Las interacciones se realizan a partir de un torbellino de interrogantes con el propósito de que los estudiantes efectúen relaciones entre objetos primarios mediante argumentaciones, realicen reflexiones originales, piensen en términos críticos, identifiquen razones y motivos, efectúen deducciones, creen planes, propuestas y métodos, entre otras acciones. Estas clases se encontraron montadas sobre escenarios de investigación, como propone Skovsmose (2012), o en ausencia del mismo.

<u>Clases con énfasis en redes de relaciones entre objetos primarios</u>: Presente en algunas de las configuraciones 1, 2, 3 y 4. Las prácticas instruccionales están orientadas a establecer redes de relaciones entre los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguajes con las situaciones problemas que les dan origen. El profesor busca que el estudiante tome conciencia del grado en que la meta está siendo lograda, modifique planes o estrategias implementadas cuando no están resultando efectivas, utilice de manera espontánea el conocimiento previamente construido, y acceda a la información relevante o pertinente que requiere la meta por medio de múltiples conexiones entre los objetos primarios. Estas instancias conducen al estudiante (en configuraciones 1 y 2) o al profesor (configuraciones 3 y 4) a relacionar y vincular toda la información que se posee al respecto, realizando profundas reflexiones, meticulosos análisis y organizando los contenidos en redes de relaciones entre objetos primarios de manera coherente. Estas clases se caracterizan por tener una alta idoneidad epistémica, interaccional y ecológica, y a veces

baja idoneidad emocional, pues no suele ser el modelo de enseñanza donde el estudiante se siente más cómodo para la clase de matemática.

Clases con énfasis en el conjunto de reglas: Presente en las configuraciones 4 y 5. El profesor le otorga vital importancia al conjunto de reglas presentes en la actividad matemática, fundamentalmente los conceptos, definiciones, propiedades, lemas, teoremas y proposiciones, para poder abordar cada situación problema. Estas prácticas instruccionales guardan similitud con el modo en que son presentados los objetos matemáticos en los libros de texto tradicionales de la matemática, donde se expone en primera instancia cuidadosamente cada concepto, propiedad y teorema involucrado, haciendo hincapié en representaciones simbólicas (lenguaje) para exponer las ideas y conclusiones matemáticas. A su vez, estas clases se caracterizan por tener una baja idoneidad interaccional, mediacional y emocional.

Clases con énfasis en procedimientos y técnicas: Presente en la configuración 6. Las prácticas instruccionales se caracterizan por centrarse en la aplicación de procedimientos, técnicas y algoritmos propios de la matemática, en desmedro de conceptos, definiciones, propiedades, proposiciones, teoremas y lemas involucrados en las situaciones problemas. Son clases que tienen una alta idoneidad emocional, pero baja idoneidad epistémica y cognitiva.

1.4. Conclusiones

El análisis de las prácticas docentes de matemática en el nivel superior muestra que aún permanecen ciertas características definidas dentro de las clases magistrales de la enseñanza de esta ciencia, las que por otro lado vienen siendo reconocidas en diferentes investigaciones (Arias y Rodríguez, 2014; Pochulu y Font, 2011, entre otros). En estas clases, las trayectorias docentes son lineales, partiendo del conjunto de reglas que involucra una situación problema (conceptos, propiedades y procedimientos), y los procesos de instrucción se encuentran intensamente guiados por los profesores, basados posiblemente en la creencia de que el alumno aprende viendo y el docente enseña mostrando, y que el gran número de estudiantes impide trabajar de otra manera en el nivel superior.

Dentro de estas configuraciones se advierte que los profesores priorizan la reproducción de conceptos, propiedades y proposiciones para la resolución de tareas rutinarias. Los objetos matemáticos son abordados con un conjunto de reglas que resultan obsoletas para la realidad profesional del estudiante, pues se prescinde de los avances que ha tenido la tecnología. Metafóricamente podría decirse que son configuraciones de clases a cargo de profesores del siglo XX, que enseñan una matemática del siglo XVII, XVIII y XIX a los estudiantes del siglo XXI. Este tipo de clases es fuertemente criticado por Chevallard (2013) y las enmarca en el paradigma de la “visita a los monumentos del conocimiento”, pues considera que los estudiantes deben visitar y admirar (en nuestro caso obras matemáticas), sin necesidad de conocer sus razones de ser presentes o pasadas. En este paradigma, el profesor es una suerte de guía de monumentos que exalta ante sus alumnos la belleza de estas obras y no hay necesidad de preguntarse por qué ni para qué, ya que el hecho de que hayan llegado hasta nuestros días pareciera justificar plenamente su estudio.

Si además se tiene en cuenta que los estudiantes deben ser preparados para la resolución de problemas abiertos y del mundo real, solo dos configuraciones de clases (la 1 y la 3) toman este objeto de estudio. Por lo tanto, las clases de matemática del nivel superior adolecen de una cantidad apreciable de aplicaciones y problemas relacionados con otras ciencias o del mundo real, circunscribiéndose, en general, a problemas de la semirrealidad o de la matemática pura, de acuerdo con la tipificación de Skovmose (2012).

Finalmente, resultó notable observar que los estudiantes no se involucraron activamente de los procesos de enseñanza y aprendizaje, lo que podría resultar desfavorable para los fines que persigue la enseñanza de la matemática en el nivel superior. En este sentido, encontramos que los estudiantes entrevistados tienen por imagen de “buen profesor” aquel que explica incansablemente las tareas a realizar, brinda incontables ejemplos, presenta de manera sencilla el conjunto de reglas de la matemática y prescinde de toda complicación en el tratamiento de los diferentes temas. Es probable también que estas creencias y visiones hayan llevado a que marcaran preferencias hacia las clases con énfasis en procedimientos y técnicas, y una desvalorización de aquellas en las que se centraron en redes de relaciones entre objetos primarios o montadas en escenarios de investigación; en tanto el “mundo matemático” que les presentó cada profesor en sus trayectorias docentes estaba coincidiendo o alejándose del que conocían o al que estaban acostumbrados en su formación previa.

1.5. Referencias bibliográficas

Arias, F. y Rodríguez, K. (2014). Formación matemática en la educación secundaria desde la perspectiva de los estudiantes que inician estudios en la Universidad de Costa Rica. *Paradigma,* 25(2), 129-154.

Charalambous, C. (2010). Mathematical knowledge for teaching and tasks. *Journal of Teacher Education*, *60*(1-2), 21-34.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education,* 2(2), 161-182.

Giménez, J. ; Font, V. & Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in Mathematics Education* (pp. 581-590). Oxford, England: Proceedings of ICMI Study 22.

Godino, J. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO* (25), 77-87.

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la UG.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2004). *Designing and Using Mathematical Tasks*. London, England: Tarquin.

Ministerio de Educación. (2001). *Resolución Ministerial N° 1232/01*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación de Argentina.

Pochulu, M. (2007). Clases universitarias de matemática: configuraciones e implicancias educativas. *Proyecciones*, 5(2), 21-32.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 14(3), 361-394.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de profesores a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 19(1), 71-98.

Rodríguez, M., Pochulu, M. y Ceccarini, A. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educação Matemática Pesquisa,* 13(3), 461-487.

Skovsmose, O. (2012). Escenarios de investigación. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 109-130). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M. & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a Casebook for Professional Development*. New York, United States of America: Teachers College Press.

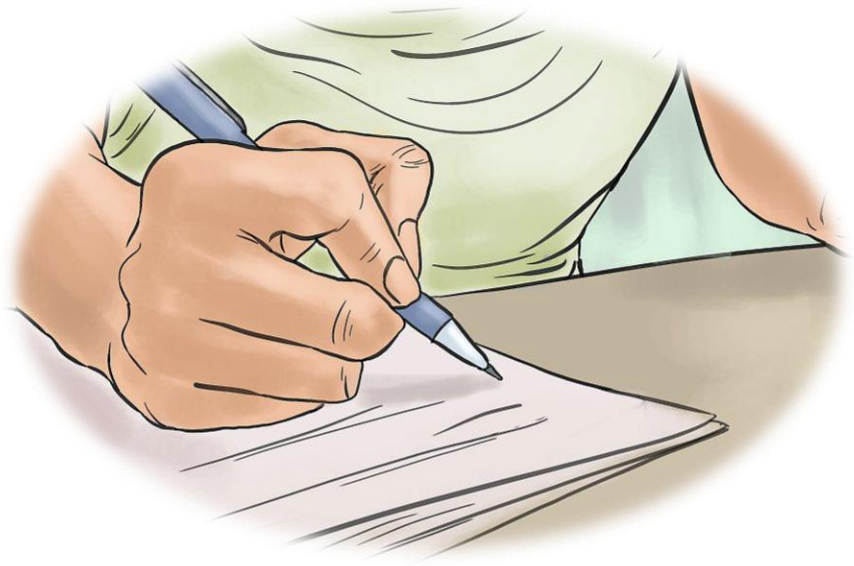
Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: a design research study. *Journal of mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 217-237.

Tzur, R., Sullivan, P. & Zaslavsky, O. (2008). Examining teachers' use of (non-routine) mathematical tasks in classrooms from three complementary perspectives: Teacher, teacher educator, researcher. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the 30th North American Chapter* (pp. 133-137). México D.F., México: PME.

Zaslavsky, O. & Sullivan, P. (Eds.) (2011). *Constructing knowledge for teaching: Secondary mathematics tasks to enhance prospective and practicing teacher learning*. New York, United States of America: Springer.

2

Las narrativas de los estudiantes como instrumento para valorar la comprensión



Marcel David Pochulu

2.1. Introducción

Sabemos que los procesos de enseñanza y de aprendizaje debieran estar orientados hacia la construcción de un conocimiento significativo y de calidad; para ello, se requieren de instancias evaluativas que permitan la construcción de un conocimiento cualificado, relevante y que generen sentidos para el propio estudiante. Solemos estar preocupados para que nuestros estudiantes logren comprender lo que se aborda en la clase de matemática, pero ¿qué significa comprender un objeto matemático?

La noción de comprensión tiene múltiples acepciones y numerosos investigadores en Educación Matemática la caracterizan, como Godino (2000 y 2003), Font (2001), Pino-Fan, Godino y Font (2011), Pochulu (2011), Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011), entre otros. En este trabajo, la entendemos del siguiente modo, a partir de una adaptación expresada en INFD (2010, p. 122):

> Comprender un objeto matemático significa (…) producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra y extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje (…), propio de la Matemática, y la lengua natural.

Esta concepción involucra al profesor en el diseño de buenas tareas de matemática para tal fin y una gestión de la clase apropiada, para que el estudiante pueda ser capaz de articular coherentemente y establecer relaciones entre seis elementos: las situaciones problemas en las que participa el objeto matemático, los conceptos, las propiedades, los procedimientos, los argumentos y el lenguaje. No obstante, tal como se señala en INFD (2010), al reflexionar sobre esta acepción, la pregunta que subyace de fondo es: ¿cómo sabrán los docentes y los estudiantes que se ha alcanzado la comprensión de determinado objeto matemático? ¿Cómo recabamos información sobre la comprensión alcanzada por un estudiante?

2.2. Herramientas y constructos de la Didáctica de la Matemática

Para encontrar respuestas a las preguntas anteriores podemos recurrir a constructos y herramientas de la Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, el Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) que propone Godino (2000, 2002, 2003) considera que toda práctica o actividad matemática está centrada en la resolución de problemas (en el sentido más amplio de su acepción, los cuales van desde simples ejercicios a instancias de modelación), y se pueden encontrar algunos o todos de los siguientes elementos primarios:

- *Situaciones problemas*: Problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, etc. Constituyen las tareas que inducen la actividad matemática.
- *Conceptos*: Están dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, lado, perímetro, baricentro, etc.), técnicas o acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, etc.).
- *Propiedades o proposiciones*: Comprenden atributos de los objetos matemáticos, los que generalmente suelen darse como enunciados o reglas de validez.
- *Procedimientos*: Comprenden algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones.
- *Argumentaciones*: Se usan para validar y explicar la resolución que se hizo de la situación problema. Pueden ser deductivas o de otro tipo, e involucran conceptos, propiedades, procedimientos o combinaciones de estos elementos.
- *Lenguaje*: Términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. Si bien en un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, en el trabajo matemático pueden usarse otros registros como el oral, corporal o gestual. Además, mediante el lenguaje, sea este ordinario, natural o específico matemático, también se describen otros objetos no lingüísticos.

Para el EOS, los seis objetos primarios que están presentes en una práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones (figura 1) son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular. Las configuraciones pueden ser epistémicas o instruccionales, si son redes de objetos institucionales (extraídas de un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), o cognitivas, si representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes). Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994).

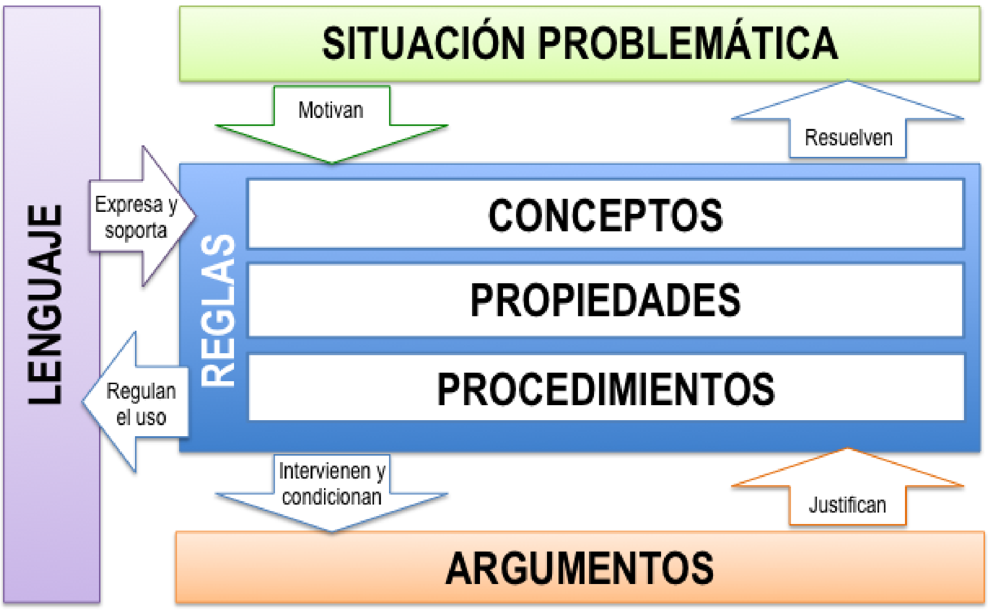


Figura 1: Configuración Epistémica/Cognitiva adaptada de D'Amore, Font y Godino (2007)

Podemos advertir que, en las configuraciones epistémicas/cognitivas, las situaciones-problemas son las que le dan origen a la propia actividad matemática y las que vienen a motivar el conjunto de reglas que aparecen en ella. El lenguaje, por su parte, sirve de instrumento para accionar en la actividad matemática que acontece. Los argumentos, en tanto, los entendemos como prácticas que aparecen para justificar las definiciones, procedimientos y proposiciones, las que están reguladas por el uso del lenguaje que, por su parte, sirve de instrumento para la comunicación.

Cada objeto matemático, dependiendo del nivel de análisis que se quiera hacer, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos. Un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos o combinaciones entre ellos y, obviamente, está soportado por el lenguaje.

El EOS concibe a la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (Godino 2000, Font 2001), pues sostiene que un sujeto comprende un determinado objeto matemático, cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

En síntesis, podríamos valernos de esta herramienta (configuración epistémica/cognitiva) para tener insumos que pudieran dar información sobre la comprensión que alcanzó un estudiante sobre cierto objeto matemático. De todos modos, ¿cómo podemos recolectar esta información?

Si se tienen pocos estudiantes, es fácil obtener datos a través de sus prácticas operativas y discursivas, con lo cual vamos estructurando el modo en que cada uno de ellos articula los seis objetos primarios en redes de significado (configuración cognitiva). Si el número de estudiantes es numeroso, prácticamente es imposible llevar a cabo un estudio personalizado de lo que acontece en la estructura cognitiva de cada uno de ellos. Un camino posible es recurrir a las narrativas o diarios de clase.

Se entiende a la narrativa como un instrumento que permite recoger datos significativos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, además de la reflexión sobre los mismos, su análisis y sistematización. Asimismo, una narrativa permite recolectar opiniones, argumentos, destrezas y actitudes presentes en situaciones reales de aprendizaje, y posibilita el rescate de las discusiones espontáneas entre los estudiantes en las puestas en común iniciales.

Las narrativas tienen por finalidad recuperar aspectos relacionados con la *Resolución de Problemas* y los procesos cognitivos involucrados en ella. Es complejo dar un concepto de "problema" y son numerosos los autores que han dedicado esfuerzos para definir o caracterizar el mismo, con múltiples acepciones. Al respecto, Rodríguez (2012, p. 155) resalta el hecho de que:

> Uno define el concepto de *problema para un sujeto*, y no simplemente la noción de *problema*. Esto expresa que lo que para un individuo resulta ser un problema, bien podría no serlo para otro. Esta relatividad al sujeto es una característica inherente al concepto y a la vez empieza a poner de manifiesto la complejidad de su uso en el aula.

Debido a que la cualidad de "ser problema" es una cuestión relativa al sujeto que resuelve, esto viene a significar que, frente a una primera lectura, el estudiante no sabe exactamente cuál es el camino que debe seguir para resolver. Esta incertidumbre lo lleva a explorar distintas estrategias no formalizadas para acercarse a la resolución, las cuales no necesariamente son exitosas o válidas desde el punto de vista matemático. No obstante, estas estrategias, o heurísticas, son las que están presentes en el trabajo del matemático cuando se encuentra ante una conjetura o problema abierto. En consecuencia, este tipo de estrategias son las que adquieren especial interés para la alfabetización matemática que se pretende instaurar en los estudiantes, intentando que las incorporen, reflexionen sobre ellas, más allá del éxito que alcancen o no en la resolución, y con los contenidos matemáticos que hayan sido necesarios considerar en la actividad (Rodríguez, 2012).

De todos modos, no es cuestión de que se le proponga a un estudiante que realice una narrativa de un problema y con ello será suficiente para valorar la comprensión lograda sobre cierto objeto matemático. Inicialmente es necesario que exista una retroalimentación entre el profesor y estudiantes, en el sentido de devolución de su trabajo, pidiendo que se profundicen ciertos aspectos del escrito, se amplíe información, se justifique mejor un razonamiento, etc. En el escrito que el estudiante realiza de la resolución del problema se podrán recuperar los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje que utiliza, y cómo los mismos se relacionan y entrelazan. Casualmente estos elementos constituyen una Configuración Cognitiva y dan información sobre la comprensión alcanzada de acuerdo a INFD (2010).

Un punto relevante es la selección de los problemas que les proponemos a los estudiantes. En este sentido, es interesante lo que nos propone Skovsmose (2012) desde la Educación Matemática Crítica, como línea u enfoque teórico de la Didáctica de la Matemática. Skovsmose (2012) describe distintas tipologías de clases de Matemática al cruzar dos dimensiones: el paradigma del ejercicio y el enfoque investigativo. Haciendo una distinción con el primero (paradigma del ejercicio) donde se situaría la clase tradicional de Matemática, propone el trabajo en la clase organizando proyectos que se montan sobre escenarios de investigación.

Skovsmose (2012, p. 111) le da el nombre de “escenario de investigación a una situación particular que tiene la potencialidad de promover un trabajo investigativo o de indagación” en los estudiantes. Este ambiente de aprendizaje viene a contraponerse totalmente al paradigma del ejercicio que ha caracterizado tradicionalmente a las clases de Matemática.

Si se tienen en cuenta los dos paradigmas que pueden dominar las clases de Matemática: del ejercicio o de investigación y, además, se consideran como referencia contextos de la Matemática pura, de la semirrealidad o situaciones de la vida real, se tendrían los siguientes ambientes de aprendizaje:

Tabla 1: Ambientes de aprendizaje (Skovsmose, 2012, p. 116)

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemáticas puras	1	2
	Semirrealidad	3	4
	Situaciones de la vida real	5	6

Skovsmose (2012) expresa que la educación matemática se mueve solo en los ambientes (1) y (2) de la Tabla 1, y sugiere moverse por los restantes. También sostiene que en los escenarios de investigación los estudiantes están al mando, pero se constituyen en tal si aceptan la invitación, la cual depende del profesor. Además, “lo que puede constituirse en un escenario de investigación para un grupo de estudiantes en una situación particular puede no convertirse en una invitación atractiva para otro grupo de estudiantes” (Skovsmose, 2012, pp. 114-115).

Advierte, además, que un escenario de investigación debe promover en los estudiantes la formulación de preguntas, la búsqueda de explicaciones, la posibilidad de explorar y explicar las propiedades matemáticas, etc. Todo esto está condicionado por el tipo de problema o actividad que se les proponga y, obviamente, la gestión de la clase que realice el profesor.

2.3. ¿Cómo empezar con narrativas?

Un modo de comenzar con narrativas sería proponerles a los estudiantes que presenten un escrito donde reúnan sus mejores producciones, con la intención de mostrar lo que han aprendido en Matemática. No obstante, tendremos que dar algunos criterios para orientarlos. Todo dependerá de los objetivos que nos proponemos para el espacio curricular, el campo profesional en el cual se inserta la materia, etc.

Por ejemplo, podríamos pedir a los estudiantes que escojan algunas resoluciones de problemas bajo ciertas condiciones:

- **El problema que involucró mayor cantidad de estrategias**. Aquí seleccionarás el problema que te llevó a usar la mayor cantidad de estrategias (exitosas o no) para llegar a la solución. Detallarás todo el proceso de resolución indicando las estrategias que has empleado, por qué las abandonaste, lo que pensaste en el camino, etc. Es de destacar que en la narración tendrás que hacer énfasis en las estrategias que se pusieron en juego. Tendrás que identificarlas y debe quedar claro cuál es la estrategia y en qué se diferencia de la otra. No podría quedar un texto continuo y que la persona que lee detecte dónde hay estrategias diferentes.

- **El problema que involucró muchos intentos de resolución y no pudiste culminarlo**. Aquí expondrás el problema que te resultó más difícil, que intentaste de muchas maneras y no llegaste a una solución, o no te sientes seguro/a de ella. En la narración deberá quedar claro cuáles son los diferentes intentos, tendrás que indicarlos y marcar para cada uno de ellos por qué lo abandonaste y por qué es diferente al anterior.
- **El mejor problema que resolviste solo**. Colocarás el problema que consideres que fue el mejor para vos, fundamentando tu elección. De la lectura debe quedar claro por qué es la mejor resolución de un problema, lo que es muy distinto a decir que fue "el problema más fácil", así que no confundas ese hecho.
- **El mejor problema que resolviste en grupo**. Tendrás que indicar lo que han pensado, en el grupo, para la resolución del problema, recuperando todos los intentos fallidos y no solo el exitoso que los llevó a la solución. Esto significa que deberás describir las estrategias que les resultaron útiles y las que no fueron útiles, explicando, en este último caso, por qué las abandonaron o no siguieron con ellas. Asimismo, tendrás que relatar lo primero que se les ocurrió pensar y/o hacer ante el enunciado del problema (¿un gráfico?, ¿un esquema?, ¿una ecuación?, ¿una tabla?, etc.). Además, tendrás que detallar lo que aportaste personalmente para la resolución del problema y lo que aportaron los otros integrantes del grupo.
- **El problema que muestra que sabes muchas cosas de Matemática**. Aquí incluirás la resolución del problema que a tu criterio muestra que sabes muchas cosas de Matemática. Esta descripción es central en el trabajo, pues tendrás que marcar qué es lo que se muestra de Matemática en el problema. Una forma de hacerlo es realizar la narrativa y entre paréntesis o en otro color, ir poniendo si es un concepto, una propiedad o un procedimiento. Al finalizar, podrás decir que en la resolución del problema se advierten los conceptos, propiedades y procedimientos que describiste anteriormente y los volvés a mencionar, pero de manera continua.

Para el final del trabajo, no deberán faltar reflexiones y comentarios, los que incluirán, por ejemplo:

- Lo que no te gustó, lo que te resultó difícil y lo que más te agradó de la resolución de problemas. No confundas en decir que no te gustó realizar el práctico, o que no te gusta Matemática, sino lo que no te gustó de una resolución de problemas en particular, dando tus argumentos.
- Lo que aprendiste matemáticamente con la resolución de los problemas (seleccionados y no seleccionados para el trabajo) y lo que considerás que "no tenés del todo claro aún". Acá no es suficiente decir que aprendiste matemática, sino más bien detallar qué cosas; esto es, qué conceptos, qué procedimientos y qué propiedades. Podrás hacer un mapa conceptual si te parece, o presentarlo de la manera que sea más creativa. También explicitarás qué preguntas te fueron surgiendo en la resolución de los problemas y pudiste responder, y qué cuestiones te quedaron confusas (siempre en torno a lo matemático de los problemas y no a saber si está bien presentado o no un informe).
- Las explicaciones, comentarios y/o preguntas que realizó el/la profesor/a o un/a compañero/a que te ayudaron a comprender alguna idea matemática. Nuevamente el foco está en que rescates algo que dijeron los profesores, compañeros, o que viste en un libro o internet y que eso hizo que de golpe se "hiciera la luz" ante una dificultad, y te ayudó a comprender mejor una idea.

Sería importante que los estudiantes conocieran los criterios de evaluación que tendrá su trabajo, por ejemplo:

- Riqueza de estrategias utilizadas en la resolución de un problema y el análisis matemático en torno a ellas.

- Uso apropiado de propiedades, conceptos, procedimientos y lenguaje matemático en las explicaciones y reflexiones.
- Claridad en las reflexiones realizadas en torno al propio aprendizaje matemático alcanzado con la resolución del problema.
- Claridad en la escritura y forma de comunicar la información.

Para que la narrativa sea un instrumento de aprendizaje, tanto para el profesor como para los estudiantes, es aconsejable que tenga devoluciones permitiendo su reescritura. Esto posibilita que el estudiante pueda mejorar sus competencias para:

- Reconocer, describir, organizar y analizar los elementos constitutivos de un problema para idear estrategias que permitan obtener, de forma razonada, una solución contrastada y acorde a ciertos criterios preestablecidos.
- Interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones.

2.4. ¿Cómo analizamos una narrativa?

El análisis de una narrativa no tiene por propósito determinar si una actividad se resolvió correctamente o no. Es necesario que se identifiquen los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y uso de lenguaje que pone en juego el estudiante en la narración (Figura 2). Esto permitirá establecer una configuración cognitiva para cada estudiante y valorar a priori la comprensión alcanzada.

Figura 2: Análisis de una narrativa para valorar comprensión

A su vez, el proceso de análisis de una narrativa no culmina en un único momento. Es recomendable que retorne al estudiante con nuevos comentarios y preguntas, con el firme propósito de mejorar los procesos de argumentación, revisar conceptos, procedimientos o técnicas que ha empleado, reflexionar sobre lo aprendido y que se planteen nuevos desafíos. Los análisis posteriores de las narrativas que fueron mejoradas por los estudiantes darán pistas sobre la comprensión que efectivamente alcanzaron con los contenidos involucrados en la tarea.

No debe perderse de vista que una narrativa es una herramienta que nos permite valorar los aprendizajes de los estudiantes y realizar una evaluación continua. Asimismo, no debe confundirse esta herramienta de evaluación con la calificación o nota que se busca poner al trabajo realizado por el estudiante.

2.5. Reflexiones finales

Si disponemos de buenos problemas que puedan llevar a los estudiantes a estar en un escenario de investigación como lo plantea Skovsmose (2012), y trabajamos con técnicas de narrativas para recuperar elementos primarios de un objeto matemático, las cuales contemplen aspectos cognitivos y metacognitivos, podremos valorar la comprensión que alcanzaron sobre los objetos matemáticos involucrados. En este ambiente de aprendizaje tendremos que analizar el modo en que cada estudiante produjo, organizó y reorganizó la red de relaciones que se establecen en la resolución de una situación problemática que obliga al funcionamiento del objeto matemático, la cual pone en juego los procedimientos, técnicas o algoritmos que son necesarios, los conceptos, definiciones, propiedades y argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por elementos lingüísticos (simbólicos o de la lengua natural). La organización de estos elementos primarios de un objeto matemático constituye una Configuración Cognitiva de acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007), y da cuenta de la comprensión alcanzada por un estudiante, de acuerdo con INFD (2010).

Es de destacar que las narrativas son un instrumento muy valioso y útil para valorar la comprensión alcanzada por los estudiantes, pero tiene como fuertes detractores a los propios profesores y estudiantes. Los profesores, porque no conciben que se pueda evaluar a través de otros formatos que no sean los exámenes parciales y finales que contienen una serie de problemas y preguntas para ser desarrolladas, generalmente por escrito, en un tiempo acotado y al final del proceso de enseñanza y aprendizaje. Los estudiantes, porque les demanda un mayor esfuerzo intelectual y se contrapone al formato que critican, pero al que están acostumbrados (evaluaciones tradicionales). El desafío está en intentar trabajar de un modo diferente en la clase de matemática y con certeza, se obtendrán resultados distintos.

2.6. Referencias bibliográficas

Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO, 56*, 86-94.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradìgma,* 28(2), 49-77.

Godino, J. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO 25*, 77-87.

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la UG.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14(3)*, 325-355.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM,* 39(1-2), 127-135.

INFD. (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática.* Buenos Aires, Argentina: INFD y SPU.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa 13 (1),* 141-178.

Pochulu, M. (2011). Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática. En: M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática – Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 54-84). Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS y EDUVIM.

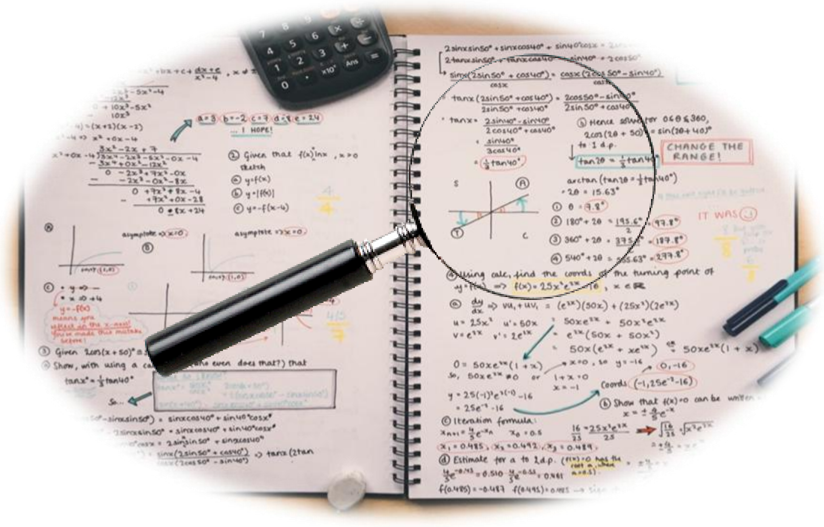
Rodríguez, M. (2001). Resolución de Problemas. En: M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática – Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 153-174). Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS y EDUVIM.

Rodríguez, M., Pochulu, M. y Ceccarini, A. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educação Matemática Pesquisa 13 (3),* 624-650.

Skovsmose, O. (2012). Escenarios de investigación. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 109-130). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

3

Análisis de las narrativas de los estudiantes para valorar la comprensión



Marcel Pochulu, Raquel Abrate, Aylén Salas, Ivana Gabetta y Silvina Sierra

3.1. Introducción

Cuando nos proponemos enseñar un determinado contenido matemático, resulta ser una preocupación constante buscar que los estudiantes logren comprender lo que se aborda en la clase de matemática. Pero, ¿qué significa comprender en matemática? La noción de comprensión tiene múltiples acepciones y numerosos investigadores en Educación Matemática la caracterizan. En nuestro caso hacemos una adaptación a la acepción que le da el INFD (2010, p. 122), cuando expresa que (la negrita nos pertenece):

> Comprender un objeto matemático significa (…) producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una **situación problemática** (intra y extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto, los **procedimientos o técnicas** que se despliegan para resolverla, las **definiciones**, **propiedades**, **argumentos** que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el **lenguaje** (…), propio de la Matemática, y la lengua natural.

Esta concepción nos ubica en la postura de diseñar y gestionar buenas tareas de matemática que permitan establecer una red de relaciones entre los objetos matemáticos subrayados en la definición anterior, los cuales se vinculan con el contenido o tema de matemática que buscamos que comprendan los estudiantes. Es de destacar que, si la tarea que se les propone a los estudiantes tiene potencial matemático pobre, se tornará difícil valorar las relaciones entre estos objetos y, por lo tanto, de la comprensión lograda.

Para el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) de Godino, Batanero & Font (2007), estos elementos conforman los objetos primarios de una práctica matemática, la cual se desarrolla en un contexto institucional. Los objetos primarios participan (todos o algunos de ellos) en una práctica matemática (ya sea operativa o discursiva), y se los identifica como: las situaciones problemas en las que participa un cierto contenido o tema de matemática, los conceptos, las propiedades, los procedimientos, los argumentos y el lenguaje (Figura 1). Asociados a cada uno de estos objetos primarios tendremos los procesos primarios, los cuales están relacionados con el objeto primario involucrado en la práctica matemática.

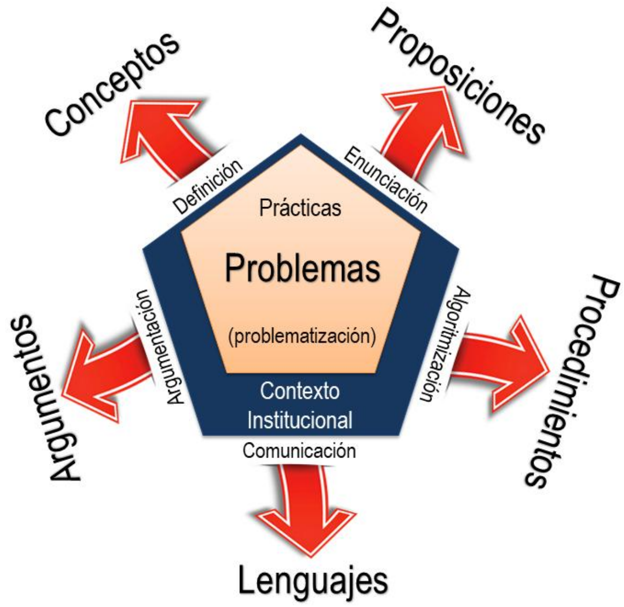


Figura 1: Objetos y procesos primarios (Godino, Batanero & Font, 2007)

Estos seis objetos primarios se articulan en configuraciones (Figura 2), las que son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Las configuraciones constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular y pueden ser epistémicas o instruccionales, si son redes de objetos institucionales (extraídas de un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), o cognitivas, si representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes). Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994).

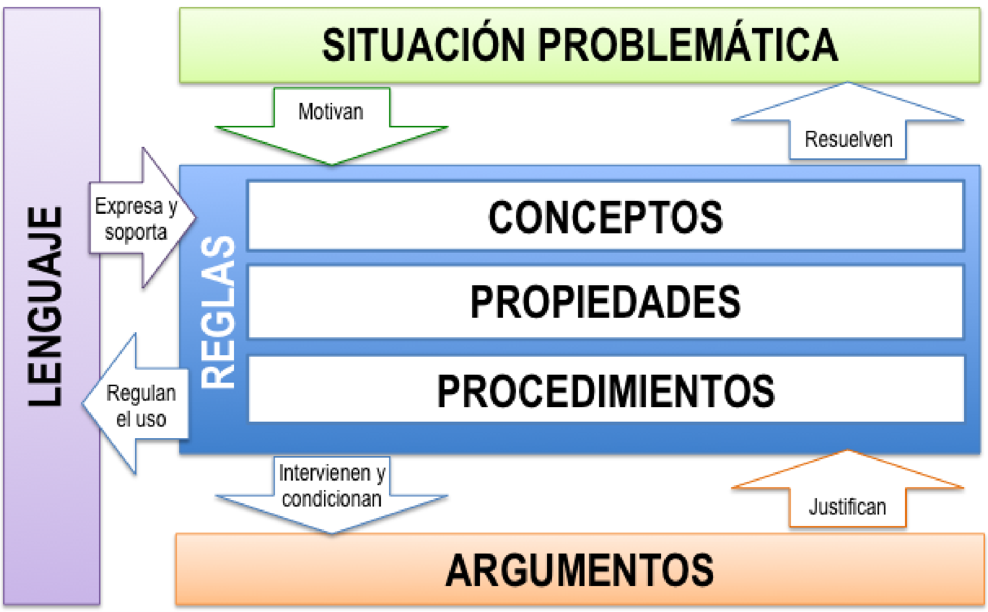


Figura 2: Configuración Epistémica/Cognitiva adaptada de D'Amore, Font y Godino (2007)

Asimismo, cabe preguntarse: ¿cómo recuperamos o determinamos la red de relaciones que puede producir un sujeto a propósito de un objeto matemático? Una alternativa es valernos de la narrativa como instrumento didáctico, pues permite recoger datos significativos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, además de la reflexión sobre las prácticas realizadas. Precisamente, a partir del escrito que el estudiante realiza de la resolución de una situación problema, se pueden recuperar los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje que utiliza, y cómo los mismos se relacionan y entrelazan, constituyendo una configuración cognitiva. El análisis entre una configuración cognitiva (o elementos de ella) con la epistémica nos brinda información sobre la comprensión alcanzada sobre un objeto matemático en particular.

El proceso de análisis de una narrativa no culmina en un único momento, pues es recomendable que retorne al estudiante con nuevos comentarios y preguntas, con el firme propósito de mejorar los procesos de argumentación, revisar conceptos, procedimientos o técnicas que ha empleado, reflexionar sobre lo aprendido y plantear nuevos desafíos. Los análisis posteriores de las narrativas que fueron mejoradas por los estudiantes darán pistas sobre la comprensión que efectivamente alcanzaron con los contenidos involucrados en la tarea.

No perdamos de vista que una narrativa nos permite valorar los aprendizajes de los estudiantes y el proceso de enseñanza, realizando una evaluación continua. Asimismo, no confundamos esta herramienta de evaluación con la calificación o nota que se busca poner al trabajo realizado por el estudiante.

Para ejemplificar el análisis que podemos hacer de una narrativa y valorar la comprensión alcanzada sobre cierto objeto matemático, tomaremos una situación problemática que fue trabajada con estudiantes de primer año de la Tecnicatura Superior en Gestión y Administración de las Organizaciones, del Instituto de Educación Superior del Centro de la República, Villa María, Córdoba, Argentina. Haremos hincapié solo en algunos episodios o fragmentos que son representativos de los aspectos cognitivos y metacognitivos, las devoluciones realizadas que permitieron reescribir las narrativas, y los momentos que se advierten competencias para reconocer, describir, organizar y analizar los elementos constitutivos de un problema. Así también, mostraremos ejemplos donde se exponen estrategias para obtener, de forma razonada, una solución contrastada y acorde con ciertos criterios preestablecidos, interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones.

3.2. Análisis de una narrativa

A continuación, mostraremos el análisis de una narrativa referida a la resolución de determinados problemas propuestos por el profesor. Lo que haremos es, por un lado, describir la práctica del estudiante al resolver algunos de los ítems de esta situación problema y, por otro, identificar elementos que nos permitan conocer el nivel de comprensión que ha alcanzado.

La narrativa surgió ante el pedido del profesor a los alumnos para que escogieran un problema, de alguno de los trabajos prácticos de la materia, que mostrara que sabían muchas cosas de matemática. De manera previa trabajaron con procesos de escritura académica, texto argumentativo y manejo de herramientas informáticas, puesto que se asume que la escritura en ciencias se debe enseñar también en matemática.

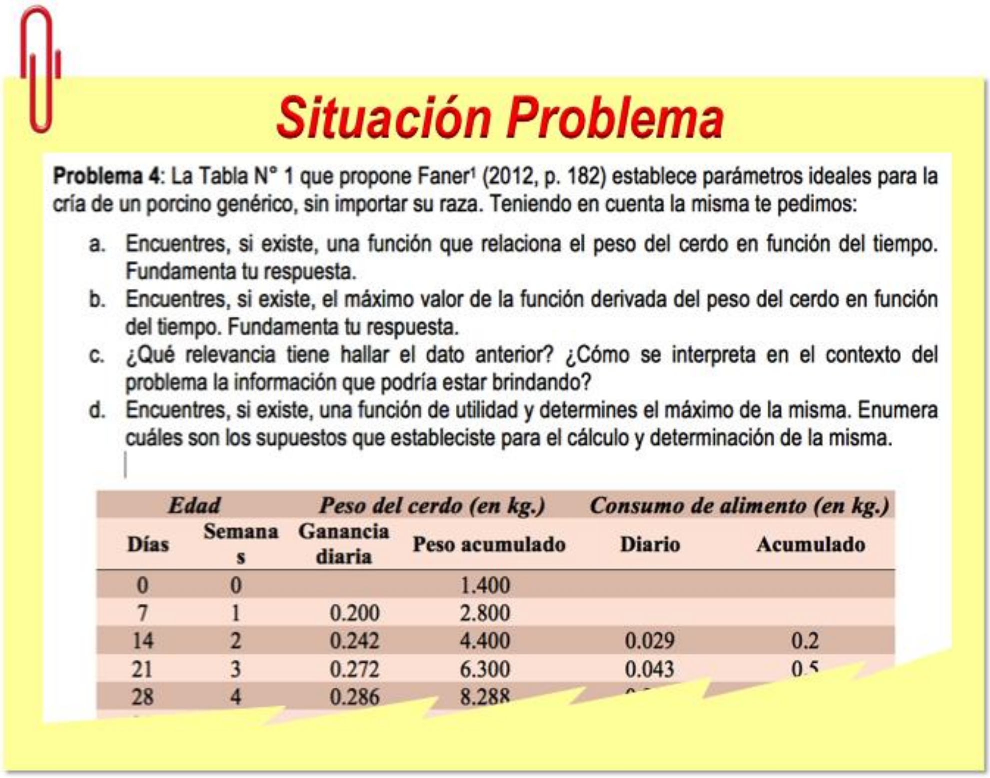
Los estudiantes sabían, además, que no se trataba solo de presentar una resolución de un problema que ya tuvieran hecho, sino de poner en juego lo que sabían de matemática. Esto llevó, por ejemplo, a que se vieran obligados a mostrar diferentes estrategias para un mismo propósito y sus competencias matemáticas, como así también, repensar un mismo problema ya resuelto.

Para facilitar el proceso de escritura de la narrativa fue necesario discriminar en el programa de la materia y entregárselo a los estudiantes, los conceptos, definiciones, propiedades, procedimientos, técnicas, algoritmos y rutinas que se suponía debían manejar. Esto favoreció el proceso de escritura, pues tenían una guía de lo que se esperaba que mostraran sobre los conocimientos matemáticos.

Pasemos ahora al enunciado del problema (un recorte de él) que escogieron los estudiantes cuya narrativa haremos el análisis (Figura 3). Para determinar el potencial matemático de la situación problema tendremos en cuenta los indicadores que establecen Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017, p. 27), entre ellos: “las *posibilidades de exploración* que la consigna habilita o no y las *posibilidades de argumentar* sobre la validez de la resolución o de la respuesta”. Advertimos que ambos indicadores están presente de manera positiva en la situación problema, lo cual es favorable si buscamos que los estudiantes puedan producir una red de relaciones entre los objetos primarios que se ven involucrados en la práctica matemática.

A su vez, podemos observar que el enunciado del problema sigue los criterios sugeridos por Barreiro *et al* (2007) para la redacción de consignas. Entre ellos tenemos:

> - Cada consigna la redactaremos *tal como se la daríamos a nuestros alumnos*. Es decir, evitamos descripciones o enunciados imprecisos o incompletos que les falte desarrollo y que solo plasmen la idea de lo que se quiere plantear en la clase. (p. 43)
> - Si el enunciado relata alguna situación en un “contexto real”, proponer preguntas que tengan que ver con el relato y su contexto. Evitar hacer preguntas sobre objetos matemáticos, ya que no tendría sentido que alguien se las hiciera si estuviera en ese contexto. (p. 44)
> - En la medida de lo posible evitar dar información que asegure existencia y/o unicidad de algo buscado. (p. 45)
> - Evitar, en la medida de lo posible, pedir directamente que el alumno halle fórmulas, resuelva ecuaciones, trace gráficos, etc. En cambio, hacer algunas preguntas donde “eso” sea un requerimiento tal que, sólo contando con él, se pueda responder la pregunta. (p. 46)
> - Incluir el pedido de argumentos o justificaciones en las que deban explicar en lenguaje coloquial por qué valen las afirmaciones que realiza el estudiante. (p. 46)



Situación Problema

Problema 4: La Tabla N° 1 que propone Faner[1] (2012, p. 182) establece parámetros ideales para la cría de un porcino genérico, sin importar su raza. Teniendo en cuenta la misma te pedimos:

a. Encuentres, si existe, una función que relaciona el peso del cerdo en función del tiempo. Fundamenta tu respuesta.
b. Encuentres, si existe, el máximo valor de la función derivada del peso del cerdo en función del tiempo. Fundamenta tu respuesta.
c. ¿Qué relevancia tiene hallar el dato anterior? ¿Cómo se interpreta en el contexto del problema la información que podría estar brindando?
d. Encuentres, si existe, una función de utilidad y determines el máximo de la misma. Enumera cuáles son los supuestos que estableciste para el cálculo y determinación de la misma.

Edad		*Peso del cerdo (en kg.)*		*Consumo de alimento (en kg.)*	
Días	**Semanas**	**Ganancia diaria**	**Peso acumulado**	**Diario**	**Acumulado**
0	0		1.400		
7	1	0.200	2.800		
14	2	0.242	4.400	0.029	0.2
21	3	0.272	6.300	0.043	0.5
28	4	0.286	8.288	[illegible]	

Figura 3: Fragmento de la situación problema que dio lugar a la narrativa

Consideramos valioso que una consigna pueda admitir diferentes posibilidades de exploración y argumentación, porque le permite al estudiante tomar decisiones, organizar sus intentos o modos para abordar la resolución, recurrir a heurísticas o utilizar distintas habilidades generales matemáticas, reflexionar sobre sus intentos para sostenerlos o descartarlos, establecer una manera de explicar el porqué de la respuesta y validar las conjeturas que emergen del proceso. Toda esta información es la que nos brinda posibilidades para analizar las redes de relaciones que se establecen entre los objetos primarios.

¿Cómo iniciamos el análisis de la narrativa? En primera instancia, tenemos que identificar los objetos primarios que se ponen en juego en el escrito del estudiante. Una estrategia que usamos es marcar con otro color estos objetos, tal como se evidencia en el siguiente fragmento de una narrativa:

> Relacionamos la variable independiente o de entrada "tiempo" (concepto) con la variable dependiente o de salida "peso acumulado del cerdo" (concepto) para crear una lista de puntos (procedimiento). Con la lista anterior hicimos un ajuste logístico (procedimiento) para graficar y obtener la función de peso acumulado del cerdo (procedimiento), ya que el ajuste logístico se utiliza para graficar pesos, poblaciones (concepto), etc., pues son magnitudes que después de un determinado tiempo tienden a estabilizarse (concepto).
>
> El dominio restringido (concepto) consiste en darle valores de dominio, variable de entrada o variable independiente a una función para contextualizar la situación que se intenta resolver. Nosotros le dimos valores de tiempo entre 0 y 60 semanas a la función Peso(x) en el contexto del problema (procedimiento).
>
> El coeficiente de determinación Rcuadrado se utiliza para saber cuánto coincide la lista de puntos con la función graficada, sabiendo que cuanto más se acerca a 1, mayor será la coincidencia (concepto). Nosotros obtuvimos un valor de 0.99755 (procedimiento) lo cual es un valor que nos indica que la aproximación es muy buena (concepto).

Este primer estudio permite estructurar la configuración cognitiva del estudiante y poder contrastarla con la epistémica, dando una primera aproximación a la comprensión que logró sobre los objetos matemáticos involucrados.

En segunda instancia, es necesario realizar una retroalimentación al estudiante que le permita mejorar los procesos de argumentación y comunicación. Para ello, se hacen comentarios a la narrativa teniendo en cuenta algunos criterios que establecen Barreiro *et al* (2017):

- Evitar dar más información que la estrictamente puesta en juego en la argumentación del estudiante,
- Intervenir desde la lógica que siguió el estudiante y no desde la que el docente tiene pensada la resolución experta del problema,
- Estimular en el estudiante el desarrollo de estrategias de autocontrol,
- Evitar realizar intervenciones solo cuando lo que el estudiante hizo está mal,
- Pedir explicaciones aun cuando el argumento dado por el estudiante sea correcto.

Ejemplos de estas intervenciones pueden verse en la siguiente devolución realizada al estudiante (Figura 4).

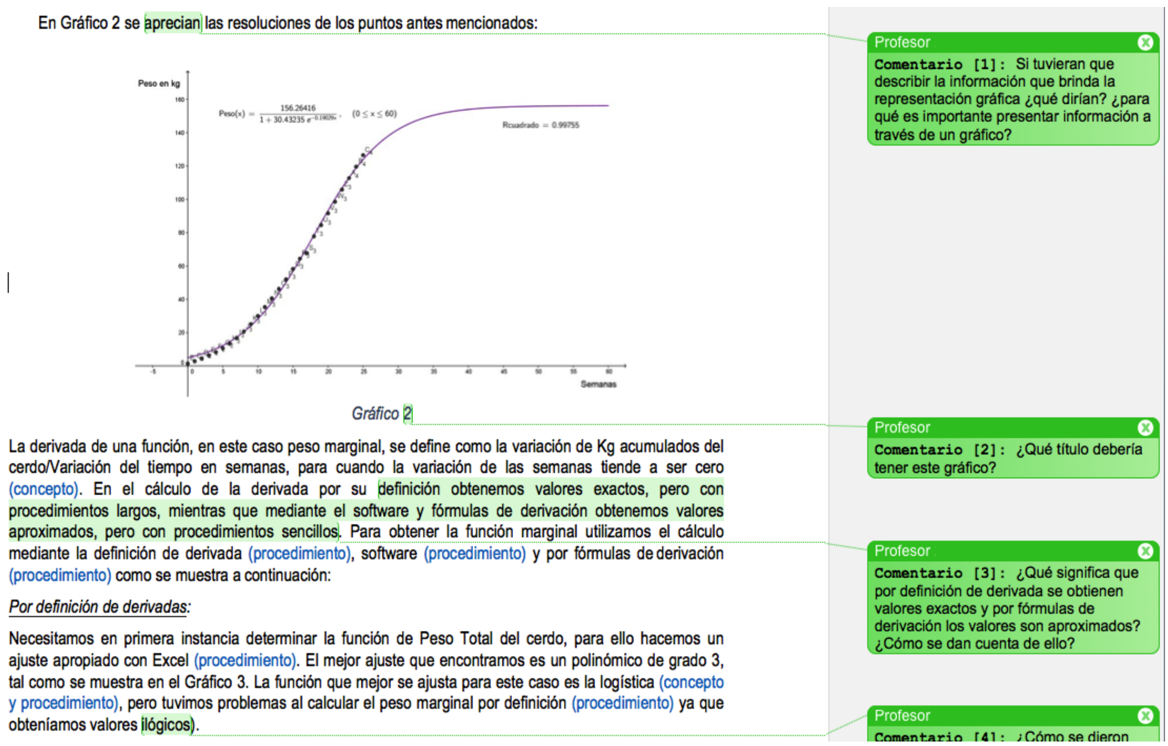

En Gráfico 2 se aprecian las resoluciones de los puntos antes mencionados:

Gráfico 2

La derivada de una función, en este caso peso marginal, se define como la variación de Kg acumulados del cerdo/Variación del tiempo en semanas, para cuando la variación de las semanas tiende a ser cero (concepto). En el cálculo de la derivada por su definición obtenemos valores exactos, pero con procedimientos largos, mientras que mediante el software y fórmulas de derivación obtenemos valores aproximados, pero con procedimientos sencillos. Para obtener la función marginal utilizamos el cálculo mediante la definición de derivada (procedimiento), software (procedimiento) y por fórmulas de derivación (procedimiento) como se muestra a continuación:

Por definición de derivadas:

Necesitamos en primera instancia determinar la función de Peso Total del cerdo, para ello hacemos un ajuste apropiado con Excel (procedimiento). El mejor ajuste que encontramos es un polinómico de grado 3, tal como se muestra en el Gráfico 3. La función que mejor se ajusta para este caso es la logística (concepto y procedimiento), pero tuvimos problemas al calcular el peso marginal por definición (procedimiento) ya que obteníamos valores ilógicos).

Profesor
Comentario [1]: Si tuvieran que describir la información que brinda la representación gráfica ¿qué dirían? ¿para qué es importante presentar información a través de un gráfico?

Profesor
Comentario [2]: ¿Qué título debería tener este gráfico?

Profesor
Comentario [3]: ¿Qué significa que por definición de derivada se obtienen valores exactos y por fórmulas de derivación los valores son aproximados? ¿Cómo se dan cuenta de ello?

Profesor
Comentario [4]: ¿Cómo se dieron

Figura 4: Retroalimentación realizada al estudiante

Si analizamos cada una de las retroalimentaciones realizadas por el profesor (ver comentarios en la Figura 4), advertimos que todas ellas tienen por propósito alentar los procesos de argumentación. Esto lleva a que los estudiantes puedan profundizar redes de relaciones entre los objetos primarios que intervienen en la práctica matemática en cuestión, que son “ingredientes” para valorar la comprensión.

A su vez, las retroalimentaciones buscan que sea el estudiante quien llegue al conocimiento a través de sus propias conclusiones y no por medio de un conocimiento aprendido o sugerido por el profesor en la pregunta. Ninguno de los comentarios marca el camino a seguir ni da pistas sobre cómo podría pensarse el problema.

Una reelaboración de la escritura para los comentarios 1 al 3 de la Figura 4 se aprecia en la Figura 5, donde se pusieron en juego nuevas redes de relaciones entre objetos primarios. Al mismo tiempo, el proceso de retroalimentación continúa, pues se busca hacer explícitos los sustentos teóricos del estudiante.

En Gráfico 2 se puede apreciar el aumento que tiene el peso del cerdo a medida que pasa el tiempo hasta lograr estabilizarse. Al principio podemos ver que aumenta rápidamente de peso al pasar los días para estabilizarse en un valor aproximado de 156.26 Kg. Un gráfico permite que nos demos cuenta cómo se relacionan las variables puesto que a través de una tabla o de una fórmula no siempre es fácil.

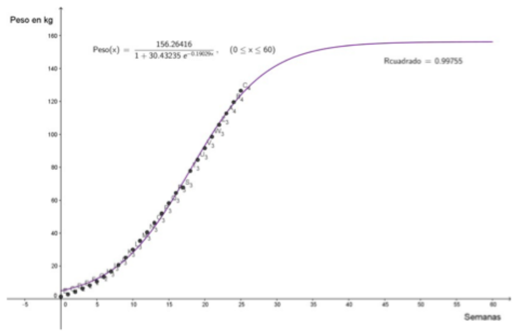


Gráfico 2: Peso de un cerdo en función del tiempo

La derivada de una función, en este caso peso marginal, se define como la variación de Kg acumulados del cerdo/Variación del tiempo en semanas, para cuando la variación de las semanas tiende a ser cero (concepto). En el cálculo de la derivada por su definición obtenemos la de peso marginal, pero con procedimientos largos y empleando aproximaciones, mientras que mediante el software o fórmulas de derivación obtenemos lo mismo, pero es un proceso más sencillo. Para obtener la función de peso marginal utilizamos el cálculo mediante la definición de derivada (procedimiento), software (procedimiento) y por fórmulas de derivación (procedimiento) como se muestra a continuación:

Por definición de derivadas:

Profesor
Comentario [1]: Si calculamos una derivada por definición, o usamos comandos del software o los hacemos por fórmulas de derivación, ¿siempre obtenemos los mismos resultados? ¿por qué si o por qué no?

Figura 5: Reescritura del estudiante y nueva retroalimentación

Finalizada la segunda etapa se tendrán suficientes evidencias para valorar la comprensión alcanzada por el estudiante. Notemos que valorar la comprensión conlleva a un estudio mucho más profundo y no solamente nos quedamos con el hecho de que un estudiante pudo resolver un problema.

El trabajo con narrativas ayuda notablemente a los estudiantes en los procesos de comunicación y argumentación. Al mismo tiempo, enriquece la práctica matemática y permite valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, como puede apreciarse en las reflexiones finales que dejó el estudiante en su trabajo:

> **Lo que no nos gustó**: Buscar las justificaciones en internet, tablas, valores, etc. Nos llevó tiempo; es difícil encontrar una fuente confiable en muchos casos y además nos costó organizar la información.
>
> **Lo que nos resultó difícil**: Fueron las redacciones, organizar los gráficos, tablas, pensar las estrategias, etc.
>
> **Lo que más nos agradó**: Fue resolver los problemas, utilizar GeoGebra, Excel.

> **Lo que aprendimos en este Práctico**: Fue sin dudas a calcular los Máximos y Mínimos a través de las raíces de las funciones derivadas, además de involucrar cálculos de volúmenes y superficies que antes no habíamos realizado.

A algunos estudiantes les lleva más tiempo entender el proceso de escritura y, ante comentarios de retroalimentación, tienden a responderlos de manera informal (Figura 6).

b) En **segunda instancia** definimos lo que es la Derivada.
La Derivada resulta ser el Límite hacia el cual tiende la razón entre el incremento de la función y el que corresponde a la variable, cuando este último tiende a cero (concepto).

Camino al éxito 1:

$$\Delta x \to 0$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Camino al éxito 2:
Otra manera de obtener una derivada es mediante Fórmulas de Derivación (procedimiento mediante método algebraico).

Camino al éxito 3:
También podemos obtener una derivada a través del Software GeoGebra (procedimiento mediante método computacional).
En este punto del problema, para obtener la derivada lo hicimos primero mediante el "Camino al éxito 2" y luego corroboramos la función con el "Camino al éxito 3".

$$P'(d) = \frac{-156.252 * (30.423 * e^{-0.027d})}{(1 + 30.423 * e^{-0.027d})^2}$$

Docente
Comentario [1]: Si tenemos en cuenta la función que están trabajando, ¿interviene una, dos o más variables? ¿por qué?

Estudiante
Comentario [2]: Son dos las variables, una es la variable independiente y la otra la dependiente. Me faltó poner que es la variable independiente.

Docente
Comentario [3]: ¿Cómo le explicarías a un compañero esta estrategia o camino al éxito como ustedes le llaman?

Estudiante
Comentario [4]: Hay que tomar cocientes entre la variación de la función y la variación de la variable independiente. Lo hacemos primero para una variación de x igual a uno, determinamos un conjunto de puntos que nos da la variación media y hacemos un ajuste de una función. Así lo hacemos con variaciones cada vez más chicas, por eso tiende a cero

Docente
Comentario [5]: ¿Por qué no consideraste el "camino al éxito 1?

Estudiante
Comentario [6]: Porque ya vimos con otros ejemplos que nos da una aproximación de la derivada porque ajustamos con los modelos que tiene el programa que son limitados

Figura 6: Retroalimentación y respuestas del estudiante

En estos casos, es necesario solicitarle al estudiante que integre sus comentarios en la narrativa mediante un texto argumentativo, el cual no tiene que verse como yuxtaposición de preguntas y respuestas de una guía.

3.3. Reflexiones finales

Partimos del hecho que el análisis de una narrativa no tiene por propósito determinar si una actividad o problema se resolvió correctamente o no. El propósito está en identificar los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y uso de lenguaje que pone en juego el estudiante en la narración y mejorar las relaciones que se establecen entre ellos. De esta manera podremos establecer una configuración cognitiva para cada estudiante y valorar a priori la comprensión alcanzada.

La narrativa, como herramienta pedagógica de enseñanza, nos brinda la posibilidad de que los estudiantes tengan un rol más participativo en el proceso de aprendizaje. El hecho que deban enfrentarse a relatar cómo interpretan el problema, analizar con qué saberes previos cuentan, qué deben explorar, y todas las acciones que competen a probar y validar en matemática, resulta provechoso para realizar prácticas de metacognición e ir regulando el proceso de aprendizaje. Asimismo, a los docentes, nos brinda la posibilidad de realizar una evaluación continua y permanente, no solo sobre cómo avanza el estudiante sino sobre el desarrollo de la propuesta de clase.

Indudablemente el número de estudiantes es un factor decisivo para trabajar con narrativas, pues con una cantidad elevada se desborda el trabajo del profesor. No obstante, si buscamos obtener resultados diferentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es necesario cambiar las estrategias didácticas empleadas en la clase, desde el diseño de tareas, la gestión de la clase y los mecanismos de evaluación. Sería un sinsentido hacer lo mismo una y otra vez con la idea de esperar resultados distintos.

3.4. Referencias bibliográficas

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática*. Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma,* 28(2), 49-77.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14(3)*, 325-355.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM,*39(1-2), 127-135.

INFD. (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática.* Buenos Aires, Argentina: INFD y SPU.

4

Análisis didáctico de prácticas institucionales de Divisibilidad

Ricardo Fabián Espinoza y Marcel David Pochulu

4.1. Introducción

Existen diversos trabajos centrados en el análisis del tipo de tareas que los profesores proponen a los estudiantes, como así también, en el desarrollo de competencias en análisis didáctico de los profesores. Estos trabajos ponen el foco en diferentes aspectos del quehacer de los profesores. Por ejemplo, Swan (2007) estudió la naturaleza y tipología de tareas; Stein, Smith, Henningsen & Silver (2000) y Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011), las características que debe cumplir una tarea para ser estimulante o retadora para el alumno; Charalambus (2010), el papel que tiene el profesor en la implementación de la tarea a fin de lograr un proceso cognitivo relevante en los alumnos; Giménez, Font y Vanegas (2013), el diseño de tareas en la formación de futuros profesores de matemática de secundaria; Pochulu, Font y Rodríguez (2016), el análisis y diseño de tareas en profesores de profesores para promover un estilo de enseñanza acorde a los lineamientos curriculares.

Si bien el tipo de tareas condiciona la actividad de la clase, se sabe que resulta clave la gestión que el profesor logra hacer de ella y el estudio que se realice a priori de las tareas que realizarán los estudiantes. En el caso particular de los Diseños Curriculares para la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria, se expresa que la construcción de conocimientos matemáticos se debe realizar a través de la resolución de problemas, lo que involucra tanto resolverlos como formularlos. El estudio a priori de las resoluciones que pueden efectuar los alumnos no solo le dará conocimientos didácticos y matemáticos al profesor, sino que contará con elementos para gestionar adecuadamente la clase.

En este trabajo describimos el modo en que se vio favorecido el desarrollo de la competencia en análisis didáctico de un grupo de 20 profesores de matemática, mientras realizaban un curso de formación docente sobre Divisibilidad. El curso fue llevado a cabo en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina.

Font (2011) y Giménez, Font y Vanegas (2013) sugieren que para desarrollar la competencia en análisis didáctico de los profesores se les debe proponer *tareas profesionales*. Estas tareas tienen que tener como objetivo realizar análisis didácticos con base en sus conocimientos, creencias, experiencias previas, o bien, utilizando herramientas teóricas que van emergiendo en el curso de formación en el que participan (Giménez *et al*., 2013).

Para desarrollar la competencia en análisis didáctico optamos por la segunda recomendación y para ello se analizaron, en primera instancia, el tipo de situaciones problema a los que responde la Divisibilidad en el nivel medio, los cuales fueron elaborados a partir del estudio de documentos curriculares, libros de textos de uso frecuente en el nivel medio y libros de matemática del nivel superior. En la segunda parte, se exhibe un problema representante de un tipo de problemas y el análisis didáctico realizado por los profesores sobre la práctica institucional de su resolución, para el que se emplean herramientas teóricas y metodológicas provenientes del Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos.

Es de destacar que el marco teórico adoptado confiere sustancial importancia a la reconstrucción de tipos de problemas que resuelve un determinado objeto matemático y el análisis didáctico institucional –realizado por el profesor sobre problemas o tipos de problemas- se convierte en referencia para el análisis de las prácticas (personales) de los estudiantes. Estos procesos desarrollados por profesores no solo mejoran las competencias en análisis didáctico, sino también persiguen el propósito de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

4.2. Marco teórico

El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos es una teoría de la Didáctica de la Matemática iniciada por el grupo de investigación denominado “Teoría de la Educación Matemática”, de la Universidad de Granada, dirigido por Juan Díaz Godino, en la década de los 90.

Siguiendo a Godino, Batanero y Font (2007), se puede manifestar que los postulados del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos se relacionan principalmente con la Antropología, la Ontología y la Semiótica, pero también se articulan de manera coherente con supuestos socioculturales y psicológicos. La Matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierto tipo de problemas, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas, actividad que está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles. De las prácticas o sistemas de prácticas realizadas para resolver problemas, emergen dos categorías primarias de objetos matemáticos: institucionales (sociales, relativamente objetivas, del profesor) y personales (individuales o mentales, del alumno), por lo que se asume que la Matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizados.

Este enfoque confiere fundamental importancia a las nociones de significados institucionales y personales, y concibe el significado de un objeto matemático, al que Godino, Batanero y Font (2007) definen como todo aquello que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemática, en términos del sistema de prácticas ligadas a un tipo de problemas. Es decir, concibe que el significado de un objeto matemático es el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona, institución o comunidad de prácticas realiza para resolver un cierto tipo de problemas en las que dicho objeto interviene (Godino, Font, Wilhelmi y Arreche, 2009). En este ámbito se considera práctica matemática a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validarla y generalizarla en otros contextos y problemas. La noción de sistema de prácticas (operativas y discursivas), constituidas por las prácticas significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución, asume una concepción pragmática–antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional como personal, y la actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático (D’Amore y Godino, 2007).

Para un análisis más fino de la actividad matemática, el Enfoque Ontosemiótico (EOS) incluye seis tipos de objetos matemáticos primarios intervinientes o emergentes de sistemas de prácticas (D’Amore y Godino, 2007): situaciones problema, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentaciones y lenguaje. Estos objetos están relacionados entre sí por medio de una función semiótica caracterizada, según D’Ámore y Godino, como una correspondencia (ya sea relación de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado, representado) que establece un sujeto, persona o institución de acuerdo con cierto criterio. Dicha correspondencia se establece entre dos objetos cuando uno de ellos se pone en lugar del otro, o bien uno es usado por otro. Con la noción de función semiótica se evidencia el carácter netamente relacional de la actividad matemática y de los procesos que difunden el conocimiento matemático.

Los objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando configuraciones (Figura 1), definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos al resolver un problema o un tipo de problemas. Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales), y persiguen la finalidad de analizar las prácticas matemáticas describiendo su complejidad ontosemiótica (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2005).

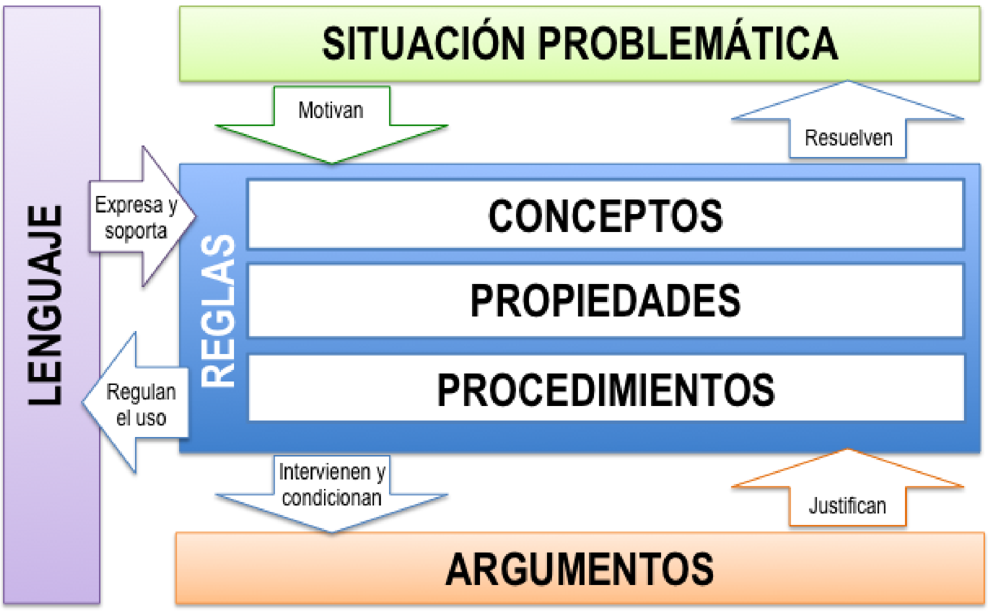


Figura 1: Configuración Epistémica/Cognitiva adaptada de D'Amore, Font y Godino (2007)

4.3. Tipos de problemas de Divisibilidad en el nivel medio

El análisis de los documentos curriculares y las situaciones problemas que proponen los libros de texto habituales de matemática para el nivel medio le permitió al grupo de profesores caracterizar los mismos. Es decir, los tipos de problemas fueron reconstruidos en el ámbito de la capacitación mencionada y resultaron ser los siguientes:

- Determinar si un número (escrito en su expresión decimal, factorial, factorial prima, en base al algoritmo de la división y en base a la propiedad distributiva) es divisor, factor, divisible o múltiplo de otro número expresado en estas mismas formas.
- Hallar todos los divisores de un número (chico, grande, producto de números primos grandes y cuadrado perfecto).
- Determinar la cantidad de divisores naturales de un número.
- Determinar la cantidad de divisores de un número.
- Identificar la cantidad de divisores de un número natural conociendo la cantidad de divisores de su duplo o cuadrado.

- Decidir si un número es primo, compuesto o cuadrado perfecto.
- Hallar un número con una cantidad dada de divisores.
- Hallar el menor número positivo con una cantidad dada de divisores.
- Indicar la condición bajo la cual, en una división, el divisor de la misma es divisor del dividendo.
- Decidir qué tipo de fracción es $\frac{a}{b}$ cuando a es divisor de b.
- Hallar un número, o más de uno, conociendo sus múltiplos comprendidos entre dos números.
- Identificar una cifra de un número, expresado en base 10, para que el mismo sea divisible por otro.
- Determinar si la relación de orden que se establece entre dos números enteros, cuando uno de los números es divisor del otro, es la misma que la que se da entre dos números naturales.
- Decidir si existen dos números distintos que tengan los mismos divisores y las condiciones bajo las que esto sucede.
- Encontrar el mínimo común múltiplo entre dos o más números cualesquiera (iguales, coprimos, uno múltiplo del otro).
- Encontrar el máximo común divisor entre dos o más números cualesquiera (iguales, coprimos, uno múltiplo del otro).

4.4. Análisis ontosemiótico de una práctica de divisibilidad

Expondremos el análisis a priori realizado por los profesores sobre dos problemas que consideramos son representantes de Divisibilidad. Este análisis conlleva a explicitar los objetos matemáticos involucrados en la práctica institucional de resolución de la situación problema y estudiar el carácter relacional de los mismos. Para expresar el resultado final del análisis recurrimos a la herramienta configuración epistémica/cognitiva que proporciona el EOS.

Problema 1

Teniendo en cuenta que $187=11\times17$, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?

a) 17 es divisor de 11×17.

b) $11\times17+1870$ es múltiplo de 187.

c) $11\times17+16$ es múltiplo de 187.

En cada caso, fundamenta tu respuesta.

Se trata de un problema intramatemático. En el primer ítem, la tarea consiste en decidir si un número escrito en base 10, es divisor de otro número expresado en su descomposición factorial prima. En el segundo apartado, la tarea consiste en determinar si un número, expresado en base a la propiedad distributiva, es múltiplo de otro número expresado en base 10. En el tercer apartado, la tarea consiste en determinar si un número, expresado en base al algoritmo de la división, es múltiplo de otro número escrito en versión decimal.

La resolución de problemas de divisibilidad con números escritos según su descomposición factorial prima, con base en la propiedad distributiva y en el algoritmo de la división, a pesar de ser solicitados desde los diseños curriculares, no son prácticas usuales en el nivel medio, por lo cual este trabajo se constituye en un aporte.

En esta práctica de resolución institucional no se trata de desplegar todos los conocimientos que dispone el Profesor, sino más bien de ilustrar los procesos cognitivos que a priori se piensa que podría desarrollar un alumno, cuya práctica es considerada adecuada o pertinente. Resumimos a continuación los aspectos centrales señalados por los profesores para la situación problema.

a) Se puede afirmar que 17 es divisor de 11×17, pues es un factor de la descomposición factorial prima de 11×17. Esto es así, pues teniendo en cuenta la definición de divisor (concepto), podemos decir que 17 es divisor de 11×17, en tanto existe un número, el 11, que multiplicado por 17 da por resultado 11×17.

b) El número $11 \times 17 + 1870$ está escrito teniendo en cuenta la propiedad distributiva. Como $11 \times 17 = 187$ y $1870 = 187 \times 10$, y en función de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números, al número en cuestión $(11 \times 17 + 1870)$ se lo puede escribir así: $187 + 187 \times 10$. Ahora bien, $187 + 187 \times 10 = 187 \times (1 + 10) = 187 \times 11$ (concepto y procedimiento), y esta expresión nos dice que el número dado en la consigna del problema $11 \times 17 + 1870$ (que también puede escribirse como $187 + 187 \times 10$) es múltiplo de 187. Esto es así pues 187 es divisor del mismo, en tanto lo podemos sostener por la definición de divisor, por lo que al número propuesto se lo puede escribir como 187×11 (concepto y argumento).

Entonces, si un número puede descomponerse en la suma de n productos con un factor común (basándonos en la propiedad distributiva), este número es múltiplo del factor común (propiedad).

c) El número $11 \times 17 + 16$ está expresado con base en el algoritmo de la división. El dividendo es $203 = 11 \times 17 + 16$, el divisor es 17, el cociente es 11 y el resto 16.

El primer múltiplo positivo de 187 es el mismo 187 y el múltiplo consecutivo es: $187 + 187 = 374$ (procedimiento). El número $11 \times 17 + 16 = 203$ está comprendido entre estos dos múltiplos consecutivos de 187, pues $187 < 203 < 374$. Por esta razón podemos afirmar que $11 \times 17 + 16$ no es múltiplo de 187, dado que entre dos múltiplos consecutivos de un número no existe otro múltiplo (argumento).

La configuración epistémica/cognitiva del problema resulta ser la que muestra la Figura 2.

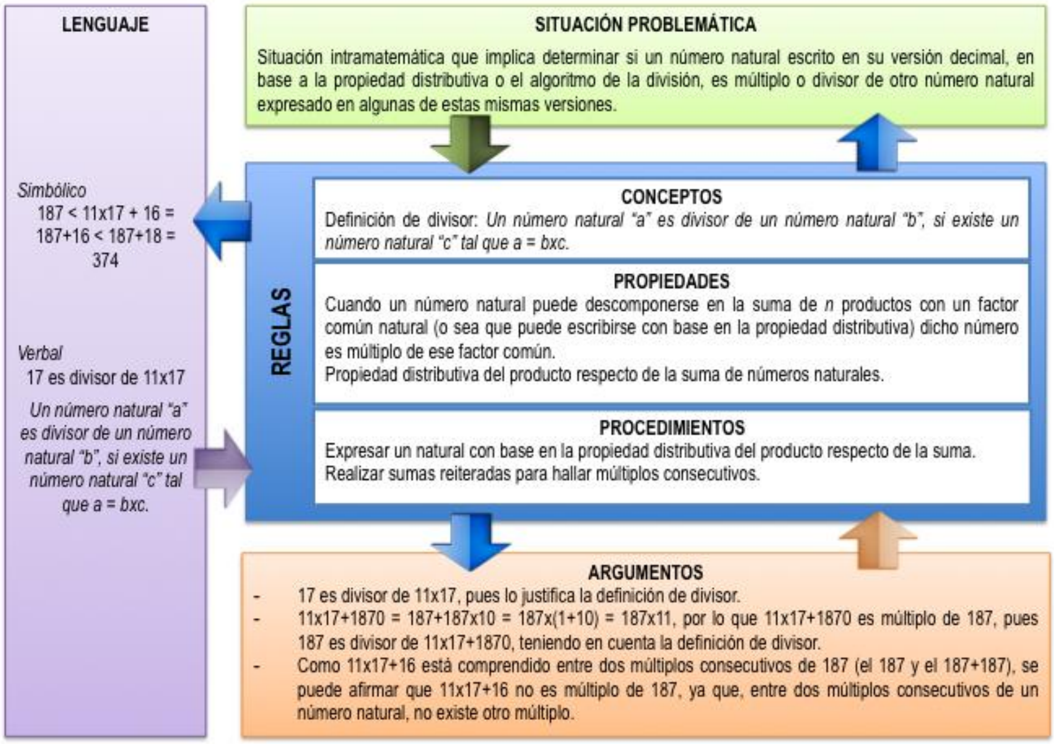


Figura 2: Configuración epistémica/cognitiva del problema 1 de Divisibilidad

Los análisis de tareas y el uso de la herramienta configuración epistémica/cognitiva resultó útil para analizar y evidenciar la trama de relaciones que caracteriza la comprensión matemática, según las nuevas orientaciones curriculares publicadas desde el Instituto Nacional de Formación Docente (INFD) de Argentina. El *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática* (INFD, 2010), introduce recomendaciones para que el futuro profesor alcance distintos grados de comprensión de la disciplina y cómo darse cuenta de ello. En particular, sobre los aspectos cognitivos referidos a la enseñanza de la matemática, el INFD (2010, p. 122) expresa:

> Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra y extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural.

Esto llevó a proponerles a los profesores que detectaran la red de relaciones que están presentes de manera inmediata en la resolución de la situación problema. Con este propósito, los profesores determinaron las siguientes relaciones entre los objetos matemáticos:

- R1: Entre el problema y el procedimiento de observar si un número p es un número primo de la descomposición factorial de un número n, para decidir que p es divisor de n.
- R2: Entre el procedimiento que consiste en observar si un número p es un primo de la descomposición factorial de un número n para decidir que es su divisor y el concepto dado por la definición de divisor.
- R3: Entre el problema y el procedimiento que consiste en expresar a un número basado en la propiedad distributiva, dejando explícito el factor común, para decidir que el número en cuestión es múltiplo de ese factor común.
- R4: Entre el procedimiento que conlleva escribir un número basado en la propiedad distributiva, dejando explícito el factor común, y el concepto dado por la definición de divisor.
- R5: Entre el procedimiento de escribir un número basado en la propiedad distributiva, dejando a la vista el factor común, y la propiedad que sostiene que cuando un número puede descomponerse en la suma de n productos con un factor común (es decir, puede escribirse basándose en la propiedad distributiva) dicho número es múltiplo de ese factor común.
- R6: Entre el problema y el procedimiento de acotar el número $11 \times 17 + 16$ entre dos múltiplos consecutivos de 187.
- R7: Entre el procedimiento de acotar el número $11 \times 17 + 16$ entre dos múltiplos consecutivos de 187, y el argumento que explica que aquel número no es múltiplo de 187, puesto que entre dos múltiplos consecutivos de un número, no existe otro múltiplo.

Analicemos otro problema de Divisibilidad y la complejidad ontosemiótica que encierra el mismo.

Problema 2

Se tienen dos cuerdas que miden 240 cm y 308 cm y se quiere cortar cada una de ellas en trozos que tengan la misma longitud, ¿cuál será la mayor longitud en que se las puede cortar, de forma tal que la longitud de corte sea la misma en ambas cuerdas y que no sobre cuerda? Fundamenta tu respuesta.

El problema está dado en un contexto extramatemático (encontrar la cuerda de mayor longitud que entre en partes enteras iguales en otras dos cuerdas dadas), para lo cual la tarea se reduce a hallar el máximo común divisor entre dos números relativamente grandes.

Como tenemos que cortar las cuerdas de la misma longitud, inicialmente tendríamos muchas opciones, como por ejemplo, cortarlas en trozos de ½ cm, de 1 cm, de 2 cm, etc., pues el problema no establece condición alguna para ello. No obstante, asumiremos que serán cortadas en trozos que resulten una longitud entera y como debemos encontrar la mayor longitud que sea común, recurriremos al cálculo del máximo común divisor, ya que nos ofrece esta posibilidad.

Sabemos que un número d es el máximo común divisor (MCD) de los números a y b (concepto), cuando:

- d es divisor común de los números a y b, y
- d es divisible por cualquier otro divisor común de los números a y b.

Para encontrar el MCD podemos realizar la descomposición en factores primos de cada número, expresándolo como el producto de potencias de números primos (procedimiento), o usar el Algoritmo de Euclides (concepto y procedimiento) que es más eficiente cuando se trata de números grandes.

Al tener dos números naturales, podemos encontrar el MCD a través de la descomposición en factores primos (procedimiento usual en los estudiantes). Para ello realizamos divisiones del número recurriendo al menor número que lo divide (procedimiento) y tendremos en cuenta algunos criterios de divisibilidad (propiedad) involucrados. En nuestro caso resulta:

240	2	308	2
120	2	154	2
60	2	77	7
30	2	11	11
15	3	1	
5	5		
1			

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \qquad\qquad 308 = 2^2 \times 7 \times 11$$

Para el cálculo tuvimos en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad:

- Un número es divisible por 2, cuando termina en una cifra par (propiedad).
- Un número es divisible por 5, cuando termina en 0 o 5 (propiedad).
- Un número es divisible por 7, cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 o un múltiplo de 7 (propiedad).
- Un número es divisible por 11, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares impares y la de los pares es 0 o un múltiplo de 11 (propiedad).

Notemos que podríamos no haber utilizado los criterios de divisibilidad. Por ejemplo, podemos darnos cuenta que el 77 es divisible entre 7, pero ignorando el criterio de divisibilidad. Lo mismo acontece con números como el 11. Teniendo la descomposición en factores primos de cada uno de los números, encontramos el MCD determinando los factores comunes con su menor exponente (procedimiento), esto es:

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \qquad\qquad 308 = 2^2 \times 7 \times 11$$

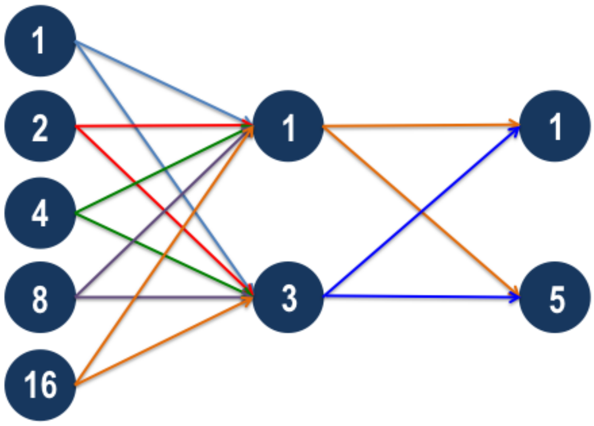
$$MCD\ (240,308) = 2^2 = 4$$

En síntesis, y para fundamentar la respuesta, la cuerda de 240 cm podría ser cortada en longitudes enteras con las siguientes medidas:

$$\text{Longitudes}_{\{240\}} = \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,16,20,24,30,40,48,60,80,120,240\}$$

Estas medidas surgen de considerar los divisores de 240 que se obtienen por aplicar principios de conteo (procedimiento) entre los divisores positivos de cada uno de los factores que tiene la descomposición prima. Sabemos que los divisores de cada uno de los factores en que se descompone un número a, también son divisores de a (propiedad).

Así, 2^4 tiene 5 divisores: $\{1,2,4,8,16\}$, mientras que el 3 tiene a $\{1,3\}$ y el 5 a $\{1,5\}$. En total tendremos $5 \times 2 \times 2 = 20$ divisores, que surgen de las siguientes combinaciones:



Resultan ser divisores del 240 los siguientes números:

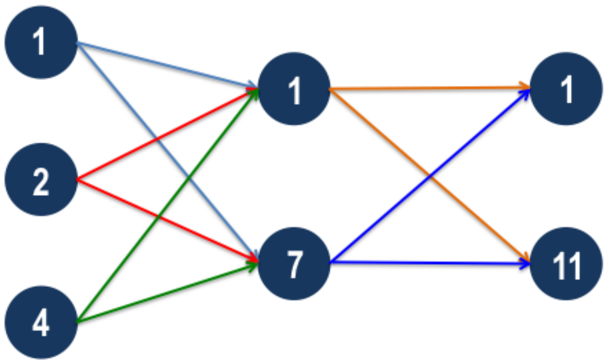
$$\mathrm{D}(240) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240\}$$

La cuerda de 308 cm podría ser cortada en longitudes enteras con las siguientes medidas:

$$\mathrm{Longitudes}_{\{308\}} = \{1, 2, 4, 7, 11, 14, 22, 28, 44, 77, 154, 308\}$$

Estas medidas surgen de considerar los divisores de 308 que se obtienen por aplicar principios de conteo (procedimiento) entre los divisores positivos de cada uno de los factores que tiene la descomposición prima, pues sabemos que los divisores de cada uno de los factores en que se descompone un número a, también son divisores de a (propiedad).

Así, 2^2 tiene 3 divisores: $\{1,2,4\}$, mientras que el 7 tiene a $\{1,7\}$ y el 11 a $\{1,11\}$. En total tendremos $3 \times 2 \times 2 = 8$ divisores, que surgen de las siguientes combinaciones:



Resultan ser divisores del 308 los siguientes números

$$\mathrm{D}(308) = \{1, 2, 4, 7, 11, 14, 22, 28, 44, 77, 154, 308\}$$

Los divisores comunes de ambos números son 1, 2 y 4. Por ello, las cuerdas podrían ser cortadas en longitudes de 1, 2 y 4 cm, cuyos valores numéricos son los divisores comunes del 240 y 308, y como el 4 es el mayor de ellos en tanto $MCD(204{,}308) = 4$, este es el modo óptimo de hacerlo (argumento), esto es, cortar cada cuerda en tramos de 4 centímetros.

Ahora bien, ¿son los únicos procedimientos que tenemos para encontrar el MCD? Ciertamente no, y vale la pena analizar algunos que resultan más intuitivos e involucran mucha riqueza matemática. Podríamos usar el concepto de divisor: *Un número natural "a" es divisor de un número natural "b", si existe un número natural "c" tal que* $a = b \times c$. En consecuencia, el 2 es un divisor y podemos descomponer al 240 como $240 = 2 \times 120$. Si un estudiante solo advierte que el 2 es un divisor y no el 120, no está articulando adecuadamente el concepto con una propiedad, la cual establece que tanto "b" como "c" son divisores.

Aquí surge un detalle relevante para profundizar la comprensión alcanzada en Divisibilidad por parte de un estudiante: ¿es posible que exista algún otro divisor de 240 mayor a 120? La respuesta es no, pero el fundamento implica entender profundamente la Divisibilidad. Si existiera un divisor de 240 mayor a 120, tendría que existir otro natural que multiplicado por él sea casualmente 240. Pero si $2 \times 120 = 240$ y $1 \times 240 = 240$, entonces deberíamos multiplicar a este número (mayor a 120) por un natural comprendido entre 1 y 2, lo cual no existe (ver Figura 3).

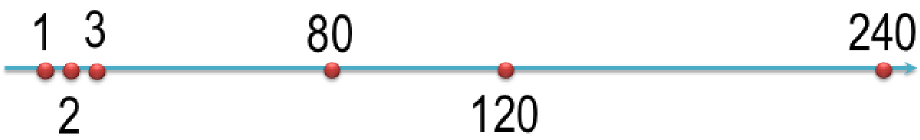


Figura 3: Algunos divisores de 240 representados en una recta numérica

Ahora, si 3 y 80 son divisores de 240, entonces tampoco existen otros divisores entre 80 y 120. Si admitimos que existe un natural m, con $80 < m < 120$, que es divisor de 240, tendríamos que encontrar otro número natural que multiplicado por m sea exactamente igual a 240. Esto no es posible pues:

$$80 = 80 \cdot 1 < m \cdot 1 < 120 \cdot 1 = 120$$

$$160 = 80 \cdot 2 < m \cdot 2 < 120 \cdot 2 = 240$$

$$240 = 80 \cdot 3 < m \cdot 3 < 120 \cdot 3 = 360$$

Resulta muy interesante que se establezca este debate con los estudiantes, porque ayuda a que se articulen propiedades, conceptos y procedimientos vinculados a Divisibilidad.

La configuración epistémica del problema resulta ser la que muestra la Figura 4.

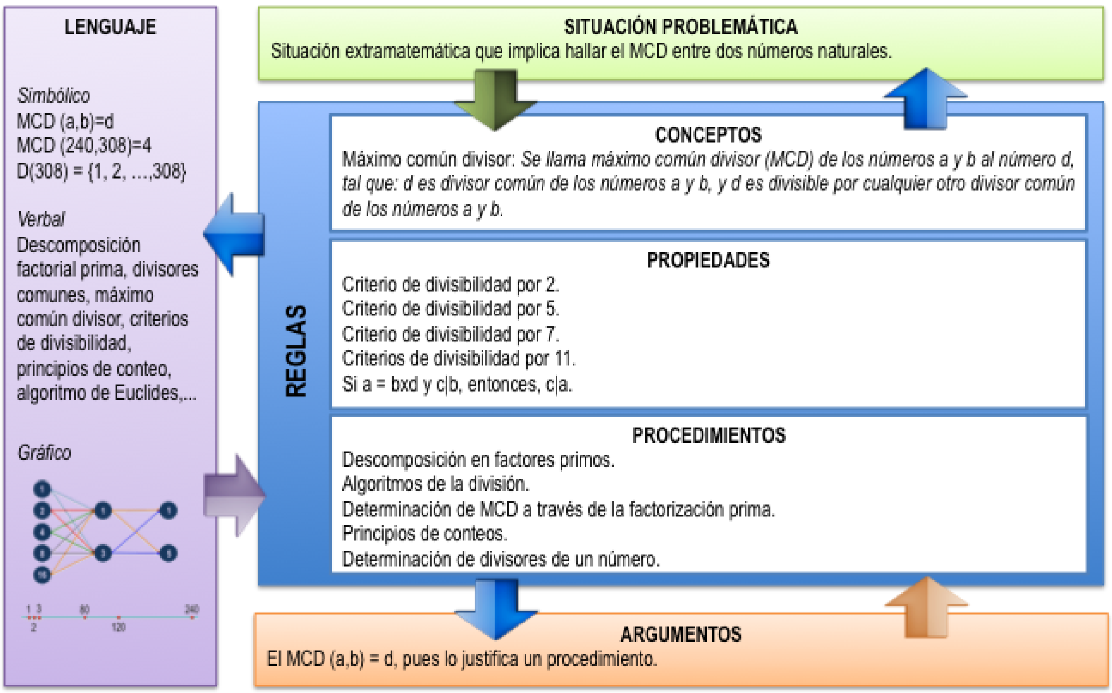


Figura 4: Configuración epistémica/cognitiva del problema 2 de Divisibilidad

Una posible red de relaciones que aparece en la configuración epistémica es la siguiente:

R1: Entre el problema y el concepto de MCD.

R2: Entre el concepto de MCD y el procedimiento de hallarlo a través de la descomposición factorial prima.

R3: Entre el procedimiento de la factorización prima de un número y el procedimiento del algoritmo de la división.

R4: Entre el procedimiento de la factorización prima de un número y la propiedad que involucra los criterios de divisibilidad de 2, 5, 7 y 11.

R5: Entre el procedimiento de la factorización prima de un número y el procedimiento que involucra principios de conteo para obtener divisores.

R6: Entre el problema y el procedimiento del cálculo del MCD que lo resuelve.

R7: Entre el problema y la argumentación dada por el procedimiento de cálculo del máximo común divisor.

4.5. Conclusiones

En el trabajo didáctico realizado con los profesores asistentes al curso de capacitación se reconstruye una gran variedad de tipos de problemas a los que responde la Divisibilidad en la escuela secundaria. Asimismo, se logró reflexionar sobre supuestos teóricos y metodológicos que subyacen en estos problemas con el fin de realizar análisis didácticos referenciales de las prácticas de los estudiantes, y las implicancias educativas que tienen estas acciones del profesor.

Al mismo tiempo, este tipo de trabajos –centrados en análisis didácticos de tareas- permiten apartar a los profesores del "sentido común" con el que suelen orientar sus prácticas docentes, acercándolos a la comprensión y uso de teorías didácticas específicas. De este modo, disponen de una amplia gama de problemas los que, propuestos en clases, podrían hacer emerger una gran variedad de relaciones conceptuales entre objetos matemáticos involucrados en las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Por otro lado, el análisis didáctico de tareas ayuda a los profesores a contar con buenas herramientas para mirar las prácticas matemáticas de los estudiantes, y a mejorar condiciones para elaborar propuestas de enseñanza pertinentes. En el análisis ontosemiótico de los problemas de Divisibilidad, los profesores asistentes al curso no solo pudieron dejar explícitos los objetos matemáticos involucrados en una práctica matemática de su resolución, sino también una importante red de relaciones conceptuales entre esos objetos, la cual da cuenta de la comprensión que alcanzarían los estudiantes.

Como aspectos negativos, en el trabajo realizado con los profesores aparecieron muchas deficiencias en términos de conocimientos didácticos y matemáticos. Además, no todos los profesores lograron hacer buenos análisis a priori de las tareas, lo que impide que puedan explicar fenómenos didácticos que surgen en la clase de matemática.

4.6. Referencias bibliográficas

Charalambous, C. (2010). Mathematical knowledge for teaching and tasks. *Journal of Teacher Education*, *60*(1-2), 21-34.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradìgma,* 28(2), 49-77.

D'Amore, B. y Godino, J. (2007). El Enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Relime*, 10(2), 191-218.

Fernández, T., Cajaraville, J. y Godino, J. (2007). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), Investigación en educación matemática, (pp. 189-198).

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 26*, 9-25.

Giménez, J., Font, V. & Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 581-590). Oxford, England: Proceedings of ICMI Study 22.

Godino, J. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM: *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2005). Articulación de marcos teóricos en didáctica de las matemáticas. Disponible en: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Godino_y_cols_Articulacion.pdf

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Arreche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 34-46.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de profesores a través del diseño de tareas. *RELIME,* 19(1), 71-98.

Rodríguez, M., Pochulu, M. y Ceccarini, A. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educação Matemática Pesquisa,* 13(3), 461-487.

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M. & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a Casebook for Professional Development*. New York, United States of America: Teachers College Press.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: a design research study. *Journal of mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 217-237.

5

Problemas de Divisibilidad y Teoría de Números para la clase de matemática

Ricardo Fabián Espinoza y Marcel David Pochulu

5.1. Introducción

Desde los primeros años de la educación primaria, los estudiantes trabajan con temas de Divisibilidad. En un primer momento con divisores, múltiplos, criterios de divisibilidad, factorización, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, clasificación de números en primos, compuestos, cuadrados, etc. Y así continúan en el nivel secundario, ampliando sus aplicaciones y significados. Sin embargo, al terminar la escuela secundaria y/o ingresar a los primeros años del nivel terciario o universitario se pueden observar diferentes niveles de dificultades en la resolución de ejercicios y problemas sencillos.

Las investigaciones sobre la comprensión de los conceptos de la teoría elemental de números han puesto de manifiesto la existencia de dificultades (Dubinsky, 1991; Vergnaud 1994; Zazkis y Campbell, 1996; Campbell, 2000; Zaskis, 2000, 2002; Espinoza, 2012). Precisamente, Zazkis (2000) indica que los estudiantes asocian el concepto de divisor con la operación de dividir y el concepto de múltiplo con la operación de multiplicar, mostrando una comprensión incompleta del concepto de factor. Además, expresa que los estudiantes realizan un intercambio constante e incoherente entre el lenguaje formal y no formal. Por ejemplo, “ser divisible” (relación entre dos números) era sustituido por “ser dividido” (un número que puede ser dividido por otro).

Espinoza (2012) muestra la confusión que tienen los estudiantes de nivel medio y universitario entre los objetos: relación divide, división y fracción. Específicamente, analiza casos en los que los alumnos operan con la relación divide como si fuera una división o fracción.

En este trabajo se exponen algunos problemas de Divisibilidad y Teoría de Números que podrían ser útiles para los profesores que se desempeñan en la escuela secundaria, pues involucran situaciones que habitualmente no se abordan en las clases.

Las actividades fueron adaptadas de investigaciones como las desarrolladas por Zazkis y Campbell (1996), Zazkis (2000 y 2001), Zazkis y Gadowsky (2001), Brown (2002), Zazkis y Liljedah (2004), Bodí (2006), Bodí, Valls y Llinares (2007), López (2015). Todas estas investigaciones se inscriben en el ámbito de la Didáctica de la Matemática y en general, abordan temáticas relacionadas con la comprensión de la Divisibilidad.

En cada caso, se explica la tarea que el problema requiere realizar y la relevancia de la situación planteada. A su vez, se exponen posibles formas de resolución. En primera instancia, se busca exhaustividad en la descripción de los procesos cognitivos que a priori se piensa que elaborarían aquellos alumnos cuyas prácticas matemáticas podrían caracterizarse como adecuadas o pertinentes. Las restantes son otras opciones de resolución, pensadas desde las prácticas de estudiantes en progresivo nivel de desempeño en la realización de tareas inscriptas en la temática en cuestión.

En la primera de las resoluciones de cada situación se ponen a funcionar 6 tipos de objetos matemáticos primarios y sus relaciones: situación-problema, definiciones/conceptos, proposiciones, propiedades, argumentos y lenguaje. Es decir, se sigue la perspectiva de autores como Godino (2000, 2003), Godino, Batanero y Font (2006), para el desarrollo de prácticas matemáticas.

Todas las resoluciones presentadas tienen su referencia en las producciones de Gentile (1984, 1991) y Becker, Pietrocola y Sánchez (2001), fundamentalmente en el análisis de las producciones de alumnos de escuela secundaria, en diferentes instancias temporales y contextuales.

5.2. Muestra de situaciones problemas y resoluciones esperadas

Consideramos valioso que una consigna pueda admitir diferentes posibilidades de exploración y argumentación, porque le permitiría al estudiante tomar decisiones, organizar sus intentos o modos para abordar la resolución, recurrir a heurísticas o utilizar distintas habilidades generales matemáticas, reflexionar sobre sus intentos para sostenerlos o descartarlos, establecer una manera de explicar el porqué de la respuesta y validar las conjeturas que emergen del proceso. Todo lo anterior se asimila al trabajo del matemático, lo que legitima el tipo de actividad que se espera realizaría el profesor en el aula de matemática.

Respecto de las posibilidades de exploración, siguiendo a Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017), se entiende que este proceso se favorece si la consigna admite diferentes caminos de resolución y si no incluye los pasos a seguir (no está pautado para un mismo fin y no se le indica al estudiante de qué manera debe hacer la actividad).

En cuanto a la actividad matemática, se entiende como el desempeño, trabajo o quehacer que el estudiante realiza ante una tarea determinada. En este sentido, la actividad matemática será valiosa si el potencial matemático de la consigna es rico, el docente le asigna un rol activo al estudiante (es este último quien encara la resolución de la tarea) y el objetivo que se persigue es cognitivamente exigente.

Para las instancias de resolución de problemas, por parte de los estudiantes, se asume que el docente gestionará la clase teniendo en cuenta algunos criterios que establecen Barreiro *et al.* (2017):

- Evitar dar más información que la estrictamente puesta en juego en la pregunta/respuesta del estudiante,
- Intervenir desde la lógica que siguió el estudiante y no desde la que el docente tiene pensada la resolución experta del problema,
- Estimular en el estudiante el desarrollo de estrategias de autocontrol,
- Evitar realizar intervenciones solo cuando lo que el estudiante hizo está mal,
- Pedir explicaciones aun cuando la respuesta dada por el estudiante sea correcta.

Este modo de gestionar la clase tiene por propósito alentar los procesos de argumentación y que los estudiantes puedan conjeturar, demostrar y validar. A su vez, se busca que sea el estudiante quien llegue al conocimiento a través de sus propias conclusiones y no por medio de un conocimiento aprendido.

Iniciamos con una lista de problemas, donde los cinco primeros tienen un carácter más estandarizado, pero involucran una red importante de conceptos, propiedades y procedimientos. El último problema propuesto es no rutinario y resulta ser un buen representante de lo que entendemos por hacer matemática en el aula.

Problema 1

Todos los múltiplos de un número, comprendidos entre 370 y 460 son: 380, 399, 418, 437 y 456. ¿De qué número se trata?, ¿es único?
Explica cómo lo/s encontraste y fundamenta tu respuesta.

La relevancia de la situación se basa en el planteamiento de lo que podríamos llamar "tarea inversa" al cálculo de múltiplos de un número, ya que el problema involucra la tarea de hallar un número, o más de uno, conociendo todos sus múltiplos comprendidos entre dos números naturales. La consigna asegura la existencia de un número en las condiciones dadas y plantea analizar la unicidad.

Asimismo, requiere la realización de una tarea fundamental del trabajo matemático como lo es el estudio y la determinación de la unicidad de la solución de un problema.

Resolución 1: La consigna presenta una lista, ordenada de menor a mayor, de todos los múltiplos de un número, comprendidos entre dos números naturales.

Sabemos que un número b es múltiplo de un número a, si y solo si a es divisor de b, o sea: $b = k \cdot a$.

Por ello, el 380 que según la consigna es un múltiplo de un número desconocido "a", resulta de multiplicar "a" por un número, es decir: $380 = k \cdot a$

El próximo múltiplo de la lista es el 399, se obtiene de multiplicar "a" por el número $k + 1$, o sea, el siguiente de k:

$$399 = (k + 1) \cdot a$$

$$399 = k \cdot a + a$$

Queda así formado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: $\begin{cases} 380 = k \cdot a \\ 399 = k \cdot a + a \end{cases}$

Si lo resolvemos por el método de reducción, esto es, restando de la segunda ecuación la primera, obtenemos que $a = 19$, que resulta ser el número buscado.

Si planteamos un sistema similar al anterior, tomando dos múltiplos consecutivos cualesquiera de la lista de múltiplos dada en la consigna y lo resolvemos de la manera indicada, obtendremos la misma solución.

Si consideramos el conjunto de los enteros, este número no es la única solución del problema, también lo es el -19, pues tiene los mismos múltiplos por ser el opuesto a 19.

Resolución 2: Teniendo en cuenta que un número es múltiplo de otro, si la división entre el primero y el segundo es exacta, por tanteo se busca el número natural del cual son múltiplos los números dados en la consigna, procediendo así:

Se realiza la división $380: 2$, y como la misma es exacta, se divide por 2 el siguiente número de la lista (el 399). Esta última división no es exacta y se descartan que son múltiplos de 2. Luego se empieza a probar nuevamente desde el primer número que propone la consigna con la división por 3, es decir, $380: 3$, $399: 3$. Como la primera división no es exacta, se continúa probando, nuevamente desde el principio de la lista de números y esta vez por 4.

Se sigue con este procedimiento hasta que todos los números de la lista, al dividirlos por un determinado número, obtengamos un cociente natural y resto 0, que es el caso del 19. Por lo tanto, todos los números dados en la consigna son múltiplos de 19.

Conjeturando que -19 también puede ser solución, pues la consigna de trabajo solicita evaluar la unicidad. Como la división entera es exacta entre los números propuestos en el problema y -19, puede constituirse en un recurso de validación.

Resolución 3: Efectuaríamos la descomposición prima de los números que presenta el problema:

$$380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19$$

$$399 = 3 \cdot 7 \cdot 19$$

$$418 = 2 \cdot 11 \cdot 19$$

$$437 = 19 \cdot 23$$

$$456 = 19 \cdot 2^3 \cdot 3$$

El número buscado es el 19, pues es el único factor común en la descomposición factorial prima de todos los números de la lista dada. Eso significa que 19 es divisor de todos los números de la lista y, por lo tanto, todos ellos son múltiplos de 19.

Teniendo en cuenta la regla de los signos del producto de números enteros, las descomposiciones multiplicativas anteriores pueden escribirse, por ejemplo, así:

$$380 = 2^2 \cdot (-5) \cdot (-19)$$

$$399 = (-3) \cdot 7 \cdot (-19)$$

$$418 = 2 \cdot (-11) \cdot (-19)$$

$$437 = (-19) \cdot (-23)$$

$$456 = (-19) \cdot 2^3 \cdot (-3)$$

Estas descomposiciones permiten determinar que -19 es divisor de todos los números de la consigna. Para validar esta afirmación, analicemos por ejemplo la última descomposición multiplicativa: $456 = (-19) \cdot (-24)$. O sea, 456 es múltiplo de -19 porque este número es divisor del primero, teniendo en cuenta la definición de divisor en el conjunto de los números enteros.

Resolución 4: Se toma 380 como el n-ésimo múltiplo de un número k y 399 como el múltiplo siguiente de k. Se considera que la consigna da una lista completa y ordenada de múltiplos de k y se tiene que:

$$380 = k \cdot n$$

El múltiplo siguiente será:

$$399 = k \cdot (n+1)$$

Restando miembro a miembro estas dos igualdades, se obtiene $k = 19$.

Como un número entero y su opuesto tienen los mismos múltiplos, -19 es también solución del problema.

Resolución 5: 19 es el número buscado, teniendo en cuenta que dos múltiplos consecutivos de un número a, difieren en a. Es decir, si se toma cualquier número de la lista dada en la consigna y se resta el inmediato anterior, se obtiene 19.

Si queremos encontrar todas las soluciones enteras, pues no se aclara el tipo de número, tendríamos una lista finita, exhaustiva y ordenada, de múltiplos de un número "a", esto es: $\{\pm a, \pm 2a, \pm 3a, \dots , \pm na \dots\}$. Restando dos múltiplos consecutivos cualesquiera de la lista (el mayor se le resta el menor), se obtiene el número a:

$$na - (n-1)a = na - na + a = a$$

Al igual que:

$$-na - [-(n+1)a] = -na + na + a = a$$

Utilizando este procedimiento, restando dos múltiplos consecutivos cualesquiera de la lista, pero esta vez al menor número le restamos el mayor y se obtiene -19, que es la otra solución.

Problema 2

$15a45$ es un número de 5 cifras, ¿existe algún valor de "a" para que este número sea divisible por 3?
En caso de que tu respuesta fuera afirmativa, indica todos los posibles valores de a. Además, explica cómo lo hiciste y justifica tu respuesta.

El problema conlleva la tarea de determinar la existencia de un dígito desconocido "a" de un número de cinco cifras, expresado en base 10, para que el mismo sea divisible por otro número de una cifra, el 3.

Para resolverlo no basta con la aplicación del criterio de divisibilidad por 3, esto es, sumar las cifras del número dado y determinar si el resultado es o no múltiplo de 3, ya que en las cifras del mismo se encuentra un literal. A partir de la aplicación de dicho criterio, emerge una importante propiedad de la divisibilidad. Son estos dos aspectos lo que le otorgan importancia al problema.

Resolución 1: Para que el número $15a45$ sea divisible por 3, la suma de sus cifras debe ser divisible por 3, teniendo en cuenta el criterio de divisibilidad por 3.

Si sumamos las cifras del número dado, $1+5+a+4+5$, y aplicamos la propiedad asociativa de la suma de números naturales, obtenemos:

$$(1+5+4+5)+a \;=\; 15+a$$

Es un número desconocido por cuanto no conocemos "a". Por este motivo, no podemos responder la pregunta solamente aplicando tal criterio de divisibilidad.

Ahora bien, hemos realizado la suma de las cifras del número en cuestión y la expresamos como suma de dos sumandos, siendo uno de ellos divisible por 3 (el 15). Para que el número de interés resulte ser divisible por 3, el otro sumando (a) debe ser divisible por 3, teniendo en cuenta que la suma de dos números divisibles por 3 es divisible por 3.

Por ello, como "a" es un dígito, pues $15a45$ según la consigna es un número de 5 cifras, sus posibles valores son: 0, 3, 6 y 9 que son números divisibles por 3, dado que 3 es divisor de cada uno de ellos.

Resolución 2: Asignar valores a "a", desde 0 hasta 9, y realizar la división entre el número que resulta y el 3. Si el cociente es natural y el resto es cero, dicho número es divisible por 3.

Se determina, de esta manera, que los posibles valores de "a" son 0, 3, 6 ó 9.

Resolución 3: Se emplea el criterio de divisibilidad por 3 y se suman las cifras del número en cuestión, esto es:

$$1+5+a+4+5 \;=\; 15+a$$

Luego, "a" debe ser un número de una cifra que sumado 15 da un múltiplo de 3. Si $a=0$, se obtiene $15+0=15$, un múltiplo de 3. Si $a=1$, no se obtiene un múltiplo de 3, etc. Con este procedimiento podemos determinar que los posibles valores de "a" son 0, 3, 6 o 9.

Resolución 4: Para que $15a45$ sea divisible por 3, empleando el criterio de divisibilidad por 3, se tiene que: $1+5+a+4+5 \;=\; 15+a$ debe ser múltiplo de 3, o sea $15+a \;=\; 3\times k$, siendo k un número natural. Luego, si se despeja "a" y se saca el factor común 3, queda:

$$a \;=\; 3.k-15 \;=\; 3.(k-5)$$

Expresión que indica que "a" es múltiplo de 3 y como de la consigna se desprende que "a" es un dígito, sus posibles valores son 0, 3, 6 ó 9.

Problema 3

¿Es posible que dos números enteros distintos tengan los mismos divisores? Si tu respuesta es afirmativa, indica en qué condiciones eso ocurre. Justifica tu respuesta.

Esta situación es un tipo de problema que conlleva la tarea de decidir si existen dos números enteros distintos que tengan los mismos divisores y las condiciones bajo las que esto sucede.

La relevancia del problema radica en el hecho de analizar casos, establecer conjeturas, argumentar, hacer emerger una propiedad: dos números enteros opuestos tienen los mismos divisores enteros.

Resolución 1: Para resolver la situación, realizaremos un exhaustivo análisis de casos particulares.

Consideremos el caso en que a y b son números enteros distintos, ambos positivos o ambos negativos. Si los dos fueran positivos y a fuese menor que b, resultaría que b es divisor de sí mismo y no es divisor de a, pues los divisores de un número entero son menores o iguales que el valor absoluto de dicho número.
Si ambos fueran negativos y a fuese menor que b, resultaría que a no es divisor de b, porque el valor absoluto de a es mayor que el valor absoluto de b y, en función de la propiedad anterior, ningún divisor puede ser mayor que el valor absoluto del número correspondiente.

Luego, como difieren en al menos un divisor, a y b no tienen los mismos divisores. Entonces, si existieran dos números enteros, distintos, con los mismos divisores, deberían tener signos diferentes, presentándose dos casos para analizar: si fueran opuestos o no.

En el primer caso, dos números enteros opuestos tienen los mismos divisores enteros. Si a es divisor de b, por la definición de divisor, existe un entero c tal que: $b = a \times c, c \in \mathbb{Z},$ y por la regla de los signos del producto de números enteros, $-b = -a \times c = a \times (-c), -c \in \mathbb{Z}$, por lo que a es también divisor de $-b$. En el segundo caso, si los números no fueran opuestos, tampoco tienen los mismos divisores, pues al menos se diferencian en el mayor divisor positivo del número de mayor valor absoluto. Dicho divisor es mayor que todos los divisores del número de menor valor absoluto y, por lo tanto, distinto a todos ellos.

En resumen, el único caso en el que dos números enteros distintos tienen los mismos divisores enteros, es cuando son opuestos.

Resolución 2: Se prueba al azar (buscando números y sus divisores) hasta encontrar dos números enteros que tengan los mismos divisores. Por ejemplo, 18 y -18 tienen los mismos divisores. Se buscan otros ejemplos y se determina que los números enteros opuestos tienen los mismos divisores enteros. De todos modos, sabemos que esta estrategia es muy poco probable que lleve al éxito a los estudiantes, pues si prueban al azar, lo hacen con números naturales. Logran encontrar números naturales que tienen la misma cantidad de divisores, lo cual es muy diferente a que sean los mismos divisores.

Resolución 3: Se prueba al azar como en el caso anterior, pero se dispone de recursos más económicos para la búsqueda. Por ejemplo, se eligen números enteros que tengan pocos divisores o aquellos cuyos divisores fueran fáciles de encontrar, como los números primos.

Resolución 4: Si se advierte que se trata de dos enteros opuestos, solo queda realizar una validación de la conjetura. Así, si a es divisor de b, entonces $b = a \cdot c$. Luego, por la regla de los signos del producto de los números enteros, se tiene que $-b = -a \cdot c = a \cdot (-c)$, siendo $-c$ un número entero. Esta deducción muestra que si a es divisor de un número entero b, lo es también de su opuesto.

Problema 4

Teniendo en cuenta que $187=11\times17$, ¿son correctas las siguientes afirmaciones?

a) 17 es divisor de 11×17.

b) $11\times17+1870$ es múltiplo de 187.

c) $11\times17+16$ es múltiplo de 187.

En cada caso, fundamenta tu respuesta.

En el primer ítem, la tarea consiste en decidir si un número expresado en base 10, es divisor de otro número expresado en su descomposición factorial prima.

En el segundo apartado, la tarea consiste en determinar si un número expresado con base en la propiedad distributiva, es múltiplo de otro número expresado en base 10.

En el tercer caso, la tarea consiste en determinar si un número expresado en base al algoritmo de la división, es múltiplo de otro número escrito en su versión decimal.

La importancia del problema radica en abordar tareas de divisibilidad no solamente con números expresados en su versión decimal sino también en otras formas, tales como la expresión factorial, el algoritmo de la división y la propiedad distributiva. Autores como Hiebert y Lefevre (1986), Zazkis (2001), Bodí, Valls y Llinares (2007), López (2015), señalan la importancia de abordar estas situaciones en las aulas. Indican que los alumnos deberían afrontar tareas con números expresados en las formas indicadas, sin tener que recurrir a la expresión decimal.

Resolución 1: Se puede afirmar que 17 es divisor de 11×17, pues es un factor de la descomposición factorial prima del mismo. Así, si tenemos en cuenta la definición de divisor, podemos decir que 17 es divisor de 11×17 en tanto existe un número, el 11, que multiplicado por 17 da por resultado 11×17.

El número $11 \times 17 + 1870$ está escrito teniendo en cuenta la propiedad distributiva. Como $11 \times 17 = 187$ y $1870 = 187 \times 10$, en función de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números, al número en cuestión se lo puede escribir así: $187 + 187 \times 10$.

Ahora bien, $187 + 187 \times 10 = 187 \times (1 + 10) = 187 \times 11$, y esta expresión nos dice que el número dado en la consigna del problema $11 \times 17 + 1870$ (que también puede escribirse como $187 + 187 \times 10$) es múltiplo de 187. Esto es así porque 187 es divisor del mismo y, de acuerdo con la definición de divisor, el número propuesto puede escribirse como 187×11. Entonces, si un número puede descomponerse en la suma de n productos con un factor común (basándonos en la propiedad distributiva), este número es múltiplo del factor común.

El número $11 \times 17 + 16$ está expresado de acuerdo con el algoritmo de la división. El dividendo es $203 = 11 \times 17 + 16$, el divisor es 17, el cociente es 11 y el resto 16.

El primer múltiplo positivo de 187 es el mismo 187 y el múltiplo consecutivo es: $187 + 187 = 374$. El número $11 \times 17 + 16 = 203$, está comprendido entre estos dos múltiplos consecutivos de 187, pues $187 < 203 < 374$, razón por la cual podemos afirmar que $11 \times 17 + 16$ no es múltiplo de 187, dado que, entre dos múltiplos consecutivos de un número, no existe otro múltiplo.

Resolución 2: Podemos usar definiciones “rudimentarias” de Divisor y Múltiplo, y proceder así:

a) 17 es divisor de 11×17, porque 17 “entra once veces” en 187 $(17 + 17 + 17 + \cdots)$.

b) 2057 $(11 \times 17 + 1870)$ es múltiplo de 187, porque “contiene 11 veces” a 187 $(187 + 187 + \cdots)$.

c) 203 $(11 \times 17 + 16)$ no es múltiplo de 187, porque “no contiene un número exacto de veces” a 187.

Resolución 3: Otro camino posible sería el siguiente:

a) Dividir 187 por 17. Como se obtiene cociente 11 y resto 0, se tiene que 17 es divisor de 187.
b) Expresar el número $11 \times 17 + 1870$ en versión decimal (2057) y dividirlo por 187. Como el cociente es 11 y el resto 0, se tiene que, $11 \times 17 + 1870$ (o 2057) es múltiplo de 187.
c) Expresar el número dado en versión decimal: $11 \times 17 + 16 = 203$. Como la división entre 203 y 187 no es exacta, se tiene que $11 \times 17 + 16$ no es múltiplo de 187.

Resolución 4: Finalmente, podemos imaginar esta otra posibilidad:

a) 17 es divisor de 11×17, porque es un factor de la descomposición factorial prima de 11×17. En efecto, todo factor p de la descomposición factorial prima de un número a es su divisor, pues a puede expresarse como el producto entre p y q, siendo q el producto de todos los otros factores primos de la descomposición factorial prima de a, cumpliendo entonces con la definición de divisor.

b) $11 \times 17 + 1870$ es múltiplo de 187, ya que dicho número es la suma de otros dos múltiplos de 187, 11×17 y 1870.

c) $11 \times 17 + 16$ no es múltiplo de 187, porque de los dos sumandos uno solo de ellos, el 11×17, es múltiplo de 187.

Problema 5

Si fuera posible, escribe un número que tenga:
a) Exactamente cuatro divisores naturales
b) Más de 15 divisores enteros
Si te resultó posible, explica la estrategia que usaste para encontrarlos y si no, explica por qué no es posible. En cualquier caso, fundamenta tu respuesta.

La relevancia de la situación tiene que ver con planteamiento de la "tarea inversa" al cálculo de divisores de un número. De hecho, el problema requiere la tarea de encontrar un número que dispone de una determinada cantidad de divisores naturales (en el primer apartado) y enteros (en el segundo).

Resolución 1: Un posible camino sería el siguiente:

a) Un procedimiento que siempre lleva al éxito en la realización de este tipo de problema es multiplicar dos números primos. En efecto, si p y q son dos números primos, el número compuesto $p \times q$ tendrá 4 divisores naturales, que son los elementos del siguiente conjunto: $\{1, \mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{p} \times \mathrm{q}\}$.

1 es uno de los divisores, porque es divisor de todos los números, $p \times q$ es también un divisor, dado que todo número es divisor de sí mismo, p y q son divisores de $p \times q$, teniendo en cuenta la definición de divisor. No existen otros divisores, ya que p y q son números primos, por lo que no pueden descomponerse en producto, salvo la descomposición trivial ($p = 1 \times p$), en cuyo caso ya se contaron 1 y p entre los divisores.

b) En el segundo apartado se solicita encontrar un número que tenga más de 15 divisores enteros (16 divisores o más). Para simplificar la tarea, se puede buscar un número que tenga 8 divisores naturales y, por lo tanto, 16 divisores enteros, teniendo en cuenta que si un número entero distinto de cero tiene una cantidad de divisores en el conjunto de los números naturales, dispone del doble de esa cantidad en el conjunto de los números enteros.

Para resolver esta situación se pude trabajar de manera similar al caso anterior, esto es, hallar el número de interés multiplicando 3 números primos. En este caso, si p, q y r fueran primos, la cantidad de divisores naturales del número $p \times q \times r$ es 8 y pertenecen al siguiente conjunto: $\{1, p, q, r, p \times q, p \times r, q \times r, p \times q \times r\}$, siendo la cantidad de divisores enteros 16.

Resolución 2: Buscar números al azar y divisores por tanteo hasta encontrar los números que reúnan las condiciones solicitadas en el problema.

Resolución 3: Otra estrategia posible conllevaría al siguiente camino:

a) Se puede responder rápidamente buscando divisores por tanteo, ya que se pide un número con pocos divisores.

b) Se pueden buscar números con cierto control sobre la posible cantidad de sus divisores, descartando, por ejemplo, números impares chicos, números primos, números que resultan del producto de dos números primos, etc.

Resolución 4: Finalmente, una cuarta estrategia sería:

a) Se tiene en cuenta que para aplicar la fórmula que permite obtener la cantidad de divisores naturales de un número, expresado en su descomposición factorial prima, hay que multiplicar todos los exponentes, aumentados en una unidad, de las bases primas de dicha descomposición. Se puede construir un número con 4 divisores naturales a partir de resolver una potencia de base prima y exponente igual a 3, o sea, la cantidad de divisores pretendida que es 4, disminuida en una unidad. Por ejemplo: $2^3 = 8$, y sus divisores son: $2^0, 2^1, 2^2$ y2^3.

b) El número solicitado deberá tener 16 divisores enteros o más, por lo que bastará buscar un número con 8 divisores naturales. Un número que reúne estas condiciones, teniendo en cuenta lo explicado en el apartado anterior, es por ejemplo $2^7 = 128$.

Problema 6

Analizar y fundamentar si es posible caracterizar a un número natural si nos dan como dato la cantidad total de divisores que tiene.

Este problema se lo puede clasificar como no rutinario, ya que la información que se suministra o bien es insuficiente o hay datos que sobran, no existe un único camino para abordarlo y por lo tanto, se ponen en juego distintas estrategias de resolución. Asimismo, pueden existir varias soluciones o bien no tener solución alguna. A su vez, podríamos caracterizar al problema como abierto, en tanto Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov (2008) expresan que son aquellos en los que se da alguna de estas condiciones:

a. dadas las propiedades iniciales, se deben encontrar las consecuencias de ellas,
b. dadas las propiedades finales, hay que encontrar las propiedades iniciales de las cuales son consecuencia, o
c. sin dar ninguna propiedad, hay que encontrar las propiedades que están relacionadas.

En nuestro caso, se enmarca en la tercera característica.

Los problemas abiertos o no rutinarios promueven el descubrimiento e invitan a los estudiantes a comenzar sin demora con el proceso de resolución. A su vez, conllevan a que puedan conjeturar y validar que es nuestro propósito central para este problema.

En este entorno de aprendizaje, una conjetura la entendemos como una proposición que tendrá que formular el estudiante y se prevé verdadera, pero que está pendiente de ser sometida a examen (aceptación o rechazo). Si la conjetura es aceptada, debe conducir a procesos de argumentación y validación matemáticos apropiados. Cabe señalar que Cañadas *et al.* (2008) entienden que la acción de conjeturar es importante en la resolución de problemas, pero que no todos los problemas invitan a conjeturar. Además, problemas diferentes conducen a distintos tipos de conjeturas.

En cuanto a la validación, la entendemos como la plantean Carnelli, Falsetti, Formica y Rodríguez (2008, p. 26), pues expresan que "la validación de un conocimiento matemático en situación de aprendizaje como el resultado de cualquier proceso del sujeto por el cual éste es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento es o no correcto o un razonamiento es o no válido".

Delineado este sucinto marco de referencia, iniciamos con la resolución. La haremos por *Inducción empírica a partir de un número finito de casos discretos*, donde la formulación de una conjetura se puede realizar a partir de la observación de un número finito de casos discretos, en los cuales se detectamos un patrón constante (Cañadas *et al.*, 2008). Para ello, determinaremos la factorización prima, divisores y cantidad de divisores de ciertos números naturales, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1: Factorización prima, divisores y cantidad de divisores de algunos números

Número	Factorización prima	Divisores	Cantidad de divisores
1	1	1	1
2	2	1 , 2	2
3	3	1, 3	2
4	2^2	1, 2 , 4	3
5	5	1, 5	2
6	$2 \cdot 3$	1, 2, 3, 6	4
7	7	1, 7	2
8	2^3	1, 2, 4, 8	4
9	3^2	1, 3, 9	3
10	$2 \cdot 5$	1, 2, 5, 10	4
11	11	1, 11	2
12	$2^2 \cdot 3$	1, 2, 3, 4, 6, 12	6
13	13	1, 13	2
14	$2 \cdot 7$	1, 2, 7, 14	4
15	$3 \cdot 5$	1, 3, 5, 15	4
16	2^4	1, 2, 4, 8, 16	5
17	17	1, 17	2
18	$2 \cdot 3^2$	1, 2, 3, 6, 9, 18	6
19	19	1, 19	2
20	$2^2 \cdot 5$	1, 2, 4, 5, 10, 20	6
21	$3 \cdot 7$	1, 3, 7, 21	4
22	$2 \cdot 11$	1, 2, 11, 22	4
23	23	1, 23	2
24	$2^3 \cdot 3$	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8
25	5^2	1, 5, 25	3

Con diferentes colores marcamos aquellos números que tienen la misma cantidad de divisores y podemos encontrar algunas características que describimos a continuación:

- Existe un único número natural que tiene un divisor y es el 1. La validación la hacemos simplemente apelando a que es la unidad del conjunto.
- Los números primos son los que tienen exactamente dos divisores. La validación la realizamos recurriendo a la definición: *Un número es primo es un número natural mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores distintos: él mismo y el 1.*
- Los números que tienen exactamente tres divisores son cuadrados de números primos. Si p es un número primo, entonces solo tiene por divisores a $\{1, p\}$. Ahora bien, si tenemos p^2, entonces los únicos divisores posibles son 1, p y p^2. Notemos que la cantidad de divisores de una potencia cuya base es un número primo es el consecutivo del exponente. Esta apreciación será de mucha utilidad para las demás características que detectemos.
- Los números que tienen exactamente cuatro divisores pueden ser agrupados en dos familias. Por un lado tenemos a los números compuestos que son el cubo de un número primo, pues p^3, con p primo, tiene como divisores posibles $\{1, p, p^2, p^3\}$.

  Por otro lado, están los números compuestos que son producto de dos números primos. Sea el número $p_1 \cdot p_2$, con p_1 y p_2 primos. Cada uno de ellos tiene dos divisores (1 y p_i) y por principio multiplicativo resultan ser solo 4 los divisores posibles: $\{1, p_1, p_2, p_1 \cdot p_2\}$.
- Los números que tienen exactamente cinco divisores son los números compuestos que se obtienen como potencia cuarta de un número primo. Esto es, números compuestos de la forma p^4, con p primo, donde los únicos divisores posibles son $\{1, p, p^2, p^3, p^4\}$.

  Cabe preguntarse, ¿no podríamos tener un número compuesto que sea el producto de potencias de dos o más números primos y que tenga 5 divisores? Veamos el caso más simple, si es un número de la forma $(p_1)^n \cdot (p_2)^m$, con p_1 y p_2 primos y n y m naturales mayores o iguales a 1.

  Cada factor tiene tantos divisores como el número consecutivo del exponente. Esto es, $n + 1$ divisores para p_1 y $m + 1$ divisores para p_2. Por principio multiplicativo, la cantidad de divisores es $(n + 1) \cdot (m + 1)$ y debería ser igual a 5, que es número primo. En consecuencia, se puede descomponer al 5 como $(1 \cdot 5)$ o sino $(5 \cdot 1)$, y resultaría que n o m son iguales a cero. Esto es absurdo, pues n y m son naturales mayores o iguales a 1.
- Los números compuestos que tienen 6 divisores naturales serán aquellos que son potencia quinta de un número primo, o el producto entre dos primos donde a uno de ellos se lo elevó a la potencia 2. La validación sigue un esquema parecido a la realizada en la caracterización anterior. Si nos preguntamos si es posible que tengamos otros números compuestos que no sean los caracterizados, la respuesta es no y se puede validar por reducción al absurdo.

Podríamos continuar con las caracterizaciones de los números naturales, si conocemos la cantidad de divisores, pero no es el objetivo acabar con la resolución del problema, sino más bien mostrar la actividad matemática involucrada, procesos de conjeturación y validación.

5.3. Conclusiones

Pensamos que es fundamental generar al interior de las aulas y en todos los niveles del sistema educativo, un trabajo matemático de calidad y posibilitador de aprendizajes significativos para todos los estudiantes y, en palabras de Sáenz (2001, p. 57), “las tareas matemáticas de explorar, formular preguntas, conjeturar y reorganizar conjeturas, son las áreas más atractivas y aquellas por las que el aprendizaje de las matemáticas puede ser de utilidad para todos”.

Con el mismo sentido, Marmolejo y Moreno (2011, p. 516) remarcan la relevancia que tienen estas formas de trabajar matemáticamente y en particular expresan que “es necesario mirar la matemática como una actividad social y cultural, en la que el conocimiento se construye a partir de la experimentación y la formulación, contrastación y justificación (argumentación) de conjeturas, y estar dispuestos a buscar patrones y regularidades”.

5.4. Referencias bibliográficas

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática.* Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS.

Becker, M., Pietrocola, N. y Sánchez, C. (2001). *Aritmética*. Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Bodí, S. (2006), *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los Números Naturales (tesis doctoral)*. Universidad de Alicante, España.

Bodí, S., Valls, J. y Llinares, S. (2007). *La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo*. Disponible en: http://www.asi4.uji.es/actas/p2a1.pdf

Brown, A. (2002). Patterns of thought and prime factorization. En S. R. Campbell y R. Zazkis (Eds.*), Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 131-137). Westport, CT: Ablex Publishing.

Campbell, S. (2000). Bringing insights from research into the classroom: The case of introductory number theory. *Proceedings of the 3rd Annual conference of the Association of Mathematics Teacher Educato*r, Chicago, ERIC.

Cañadas, M., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), 431–444.

Carnelli, G., Falsetti, M., Formica, A. y Rodríguez, M. (2008). Un estudio del aprendizaje de validación matemática a nivel pre-universitario en relación con distintas interacciones en el aula. *Suma*, 58, 25-40.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, In Tall, D (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Boston, USA: Kluwer Academic Publishers.

Espinoza, R. (2012). Estudios didáctico – matemáticos de prácticas asociadas a la Divisibilidad en Números Enteros (tesis de maestría). Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina.

Gentile, E. (1984). *Notas de Álgebra I*. Buenos Aires, Argentina: EUDEBA.

Gentile, E. (1991). *Aritmética elemental en la formación matemática*. Buenos Aires, Argentina: Edipubli.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *UNO 25*, 77-7.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada, España: Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). *Un Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Granada, España: D Universidad de Granada.

López, A. (2015). *Significados de la relación de divisibilidad de maestros en formación manifestados en el desarrollo de un modelo de enseñanza*. Granada, España: Universidad de Granada.

Marmolejo, V. E. y Moreno A. G. (2011). Argumentar-conjeturar: introducción a la Demostración. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, (pp. 509-516). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sáenz, C. (2001). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Quinto Simposio de la Sociedad Española en Investigación en Educación Matemática*, (pp. 45-62). Almería, España: SEIEM.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In Guerson, H. y Confrey J. (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany: SUNY.

Zazkis, R. (2000). Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 4, 210-238.

Zazkis, R. (2001). Múltiplo, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes. *Relime,* 4(1), 63-92.

Zazkis, R. (2002). Language of number theory: metaphor and rigor. In S. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp. 83-95). Westport: Ablex Publishing.

Zazkis, R. & Campbell, S. (1996). Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (5), 540-563.

Zazkis, R. & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers, In A. Cuoco (Ed.), *NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics* (pp. 41-52). Reston: NCTM.

Zazkis, R. & Liljedah, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), 164-186.

6

Interdisciplinariedad en la enseñanza y aprendizaje de la matemática

Marcel David Pochulu y Ricardo Fabián Espinoza

6.1. Introducción

La enseñanza de la matemática plantea grandes desafíos para quienes tienen que enseñarla en los distintos niveles educativos. En tiempos pasados era suficiente mostrar algunas técnicas y algoritmos relevantes y aplicarlos en problemas de una realidad falseada o manipulada para ese fin. Alsina (2007, p. 85) expresa categóricamente que “gran parte del tiempo dedicado a la enseñanza de la matemática se dedica a la resolución de ejercicios rutinarios alejados de la vida cotidiana”. Además, Chavarría y Hidalgo (2009, p. 140) sostienen que “nos olvidamos de llevar a nuestras aulas sencillas discusiones que permitan al estudiante valorar el esfuerzo que le demandó a la humanidad llegar a los resultados matemáticos a los cuales tenemos acceso con tanta facilidad”.

Los retos presentados por las diversas ciencias o disciplinas llegan hoy a la clase de matemática convertidos en problemas que plantean la necesidad de un abordaje interdisciplinario. Esto nos lleva a cambiar el modo de pensar y actuar en la clase y, mucho más importante aún, lograr que los estudiantes alcancen una educación diferente, acorde con las demandas actuales. No podemos seguir siendo profesores del siglo XIX que enseñamos una matemática del siglo XVII a estudiantes del siglo XXI.

Muchas de los problemas actuales requieren ser abordados en una clase involucrando contenidos que suelen escapar a los que habitualmente trabajamos en la clase de matemática. Sabemos que estas situaciones ponen a los profesores en la posición incómoda e inusual de no saber contenidos de otras disciplinas, o incluso de la propia matemática, cuando se requiere que sea aplicada. Al mismo tiempo hay que pensar que nos encontramos en una comunidad de aprendizaje donde el profesor es un coordinador de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y no quien tiene todas las respuestas. Es necesario desterrar la idea de que el estudiante tiene que contar con todos los conocimientos matemáticos para abordar un problema, o que usará solamente métodos y algoritmos tradicionales enseñados en la escuela. Tampoco podemos ignorar la presencia de la tecnología que media la resolución de cualquier tipo de problema, y más aún, si pretendemos un enfoque interdisciplinario de la enseñanza de la matemática. En este sentido, el

INFD (2010, p. 123) nos expresa puntualmente que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática tienen que ser revisados, pues sostiene que:

> La búsqueda de resultados exactos a problemas matemáticos hace tiempo que se mostró insuficiente. La realidad que se pretende explicar se describe con modelos que, mayoritariamente, se resuelven por métodos numéricos computacionales que ofrecen soluciones aproximadas y cuya precisión, generalmente, se puede controlar. Sin embargo, esta dualidad epistémica no llega a las aulas, en las cuales prevalece la búsqueda de soluciones exactas.

Podemos ver que a lo largo de la historia existió una estrecha interrelación entre la matemática y las demás disciplinas, las que deben ser retomadas en las clases actuales a través de la interdisciplinariedad. Además, ciencias como la biología, fisiología, medicina, agronomía, entre otras, demandan actualmente nuevas herramientas matemáticas que permitan un manejo más ágil de los datos experimentales. Esto supone la existencia de un grupo de disciplinas relacionadas entre sí y con vínculos previamente establecidos, donde se tiene que evitar el desarrollo de acciones aisladas, dispersas o segmentadas. De alguna manera, estamos ante una subordinación de las áreas del conocimiento a la percepción y comprensión del mundo.

Pero, ¿es posible llegar a la interdisciplina sin pasar por la disciplina? Andonegui (2004) plantea que la visión interdisciplinaria requiere que no se devalúe ni se mutile ningún conocimiento disciplinar, puesto que todos son necesarios y, al mismo tiempo, que no se levanten muros entre las distintas ciencias dado que ninguna de ellas es más relevante que las demás.

No obstante, la interdisciplinariedad no debe visualizarse como el proceso de utilizar a una disciplina como herramienta de la otra. Si bien es cierto que la matemática tiene el papel de herramienta en muchas otras ciencias para la resolución de problemas, no puede ser concebido este procedimiento como interdisciplinariedad. Chavarría e Hidalgo (2009) sostienen que ignorar o despreciar las interrelaciones entre las ciencias, incluida actualmente la tecnología, alimenta una polémica estéril que se transfiere de forma inevitable al ámbito escolar.

Nicolescu (1996) distingue tres grados de interdisciplinariedad: a) de aplicación, cuando las estrategias o técnicas de una disciplina se traspasan a otra con el objetivo de obtener diferentes resultados; b) epistemológico, cuando la transferencia de los métodos de otras disciplinas impacta la epistemología de otra disciplina; y c) de concepción, cuando surgen nuevas disciplinas más complejas a partir de otras más simples (como por ejemplo la medicina matemática y la oceanografía).

Más allá de esta caracterización, lo cierto es que la interdisciplinariedad es indispensable para el aprendizaje, la práctica holística y el desarrollo de las habilidades en los estudiantes para el futuro laboral que les espera. La interdisciplinariedad se ha convertido en un aspecto esencial de la actitud humana y aparece como una demanda en programas de innovación de la enseñanza, razón por la cual, no podemos ignorar lo que acontece en la realidad, si estamos involucrados en la educación y formación de estudiantes y profesionales.

6.2. Hacia un enfoque interdisciplinario de la enseñanza de la matemática

La mayor dificultad para abordar un enfoque interdisciplinario de la enseñanza de la matemática se encuentra en que el cuerpo de profesores decida trabajar de una manera diferente al modo en que aprendieron la disciplina y, en muchos casos, al modo en que la están enseñando. El punto de partida no sería tomar las interrelaciones entre las disciplinas, sino más bien, las interrelaciones entre los fenómenos y los procesos que son objeto de estudio en la resolución de problemas que están vinculados con la realidad (Motta, 2002).

A su vez, es necesario que el cuerpo de profesores sea reflexivo ante las necesidades que tienen las disciplinas y las herramientas que puede brindar la matemática. Por ejemplo, si analizamos lo que acontece con problemas del mundo real de las disciplinas, advertimos que, en general, parten de datos experimentales. Con ellos se buscan modelos matemáticos para describir las relaciones entre las variables y así poder pronosticar, predecir, estimar o anticipar comportamientos en el corto y mediano plazo. Eventualmente se presentan gráficas que muestran la relación entre las variables y en este caso, las nuevas tecnologías suelen ser un buen aliado. Estas temáticas sin dudas se encuentran insertas en la matemática, pero ¿se abordan en una clase habitual dentro de una carrera no matemática?

Veamos ahora lo que ocurre en la clase de matemática. Para abordar la problemática, el profesor suele partir de un modelo funcional previamente establecido y se preocupa por hacer y mostrar un análisis minucioso del comportamiento de la función, prescindiendo incluso de nuevas tecnologías. El estudio conlleva a determinar en forma algebraica y con tediosos cálculos las curvaturas, máximos y mínimos locales, raíces, asíntotas, paridad, entre muchos otros objetos matemáticos. Posteriormente se procede a realizar un gráfico aproximado de la función y a mano alzada. ¿Esto era lo que requería el campo profesional? Definitivamente no, pues no era la preocupación central hacer un gráfico de una función, la cual no se tiene en la mayoría de los casos o se realiza fácilmente con un software. En consecuencia, existe un divorcio entre lo que requieren las diferentes ciencias y lo que está aportando actualmente la matemática.

Es necesario pensar en un enfoque unificado, donde se trabajen problemas reales del campo profesional en el que se inserta la matemática. ¿Significa que no tenemos que pasar por la disciplina? No, pues podemos trabajar lo disciplinar desde la misma interdisciplinariedad. ¿Significa que tenemos que abandonar los conceptos centrales de la disciplina? No necesariamente, pero sí revisar lo que estamos enseñando y la metodología empleada, como así también, incorporar temas que se requieren actualmente desde las demás disciplinas y suprimir otros que quedaron obsoletos.

Entendemos que un estudiante debería acceder a estos contenidos buscando información al respecto, lo que implica hacer una selección de las variables adecuadas, la relevancia de las mismas, la exactitud de los datos y la confiabilidad de las fuentes. Si todos los datos son suministrados con el problema, se coarta la formación de estudiantes con pensamiento crítico para la búsqueda de información. Tampoco es lógico pensar que el trabajo de búsqueda de información sea tarea exclusiva del alumno. Lograr que los estudiantes encuentren información adecuada en la maraña de la *web*, por ejemplo, no es un trabajo menor para los profesores, pues Internet no puede ser considerada solo como un sitio de consulta.

6.3. Relato de una experiencia de clase

Relatamos una experiencia particular que involucra el tratamiento de modelos funcionales, con el propósito de que se advierta la filosofía de trabajo que esbozamos sucintamente en la sección anterior. Como ejemplo, abordaremos una temática actual que involucra el crecimiento poblacional o demográfico.

El crecimiento poblacional o demográfico se define como el cambio que se produce en el número de individuos de una población, de cualquier especie, en un cierto plazo, y puede ser cuantificado como el cambio en dicho número usando “tiempo por unidad” para su medición. Es un fenómeno biológico ligado a la capacidad reproductiva de los seres vivos.

Los estudios del crecimiento de las poblaciones echan luz sobre la planificación de mejoras en el rendimiento, la producción y la calidad de vida de las distintas especies, pero también alertan sobre la explotación de los recursos naturales y la contaminación. Además, las determinaciones y predicciones del crecimiento poblacional aportan innumerables herramientas que permiten planificar condiciones de salud, producciones alimentarias y, en general, programas que ayuden al progreso de una especie. Estos estudios pueden realizarse a partir de diversos modelos matemáticos, según la población tenga o no crecimiento acotado, disponga o no de un nivel mínimo de individuos, esté expuesta o no a siembras y cosechas, crezca o no con ritmo uniforme, etc.

Si buscamos información en Internet sobre el crecimiento de la población mundial, podemos advertir que a partir de 1950 prácticamente se ha triplicado, pues para principios del 2018 se estimaba en 7580 millones, lo cual es motivo de preocupación. Este crecimiento no es homogéneo y se pueden determinar períodos de disminución y/o en aumento, los cuales guardan estrecha relación entre los diferentes espacios geográficos.

Nos proponemos abordar como problema el crecimiento poblacional o demográfico de Argentina y para ello, proponemos la siguiente consigna:

Problema

Establecer y fundamentar un modelo matemático que permita describir la dinámica poblacional de Argentina. Asimismo, anticipar la cantidad de habitantes que tendrá Argentina para dos años futuros particulares y comparar los resultados con lo proyectado por organismos oficiales. Entendemos que la respuesta tiene que estar fundamentada a través de un estudio matemático, más que limitarse a la búsqueda de esta información en Internet.

Para avanzar en la búsqueda de respuestas al problema propuesto, haremos un recorte y simplificación del mismo. Entendemos que el crecimiento demográfico mide el aumento, en un período específico, del número de personas que viven en un país o una región. Ligado a este concepto, está el de tasa de crecimiento demográfico que depende de la tasa de natalidad y de la tasa de mortalidad, de los movimientos migratorios, entre otros. La tasa de natalidad depende, a su vez, de la tasa de fecundidad. La tasa de fecundidad está influida por muchos factores, pero el principal es el nivel cultural de la sociedad y especialmente de las mujeres, pues se acepta que, a mayor cultura, menor número de hijos se tienen. La tasa de mortalidad depende del grado de desarrollo económico y sanitario del país.

Una primera simplificación que hacemos del problema es no tener en cuenta todas estas variables del crecimiento poblacional. Nos limitaremos a analizar datos numéricos aportados por los censos realizados en Argentina en los últimos años y las tendencias que parecerían estar marcando.

Iniciamos entonces buscando los datos de los últimos censos realizados en Argentina. El objetivo será encontrar algunos modelos que permitan estimar el crecimiento poblacional, con todas las limitaciones que tiene el modelo encontrado debido a la simplificación realizada. Los datos pueden ser fácilmente encontrados en la red, con los que podemos hacer un diagrama de dispersión y primer ajuste.

Partimos de un primer supuesto: "El crecimiento poblacional de Argentina ha sido lineal". Esto es, asumimos que cada año la población ha crecido en una magnitud constante. A su vez, denotamos con N el número de habitantes o población, en millones de personas, y con t, el tiempo transcurido desde 1869 (Figura 1).

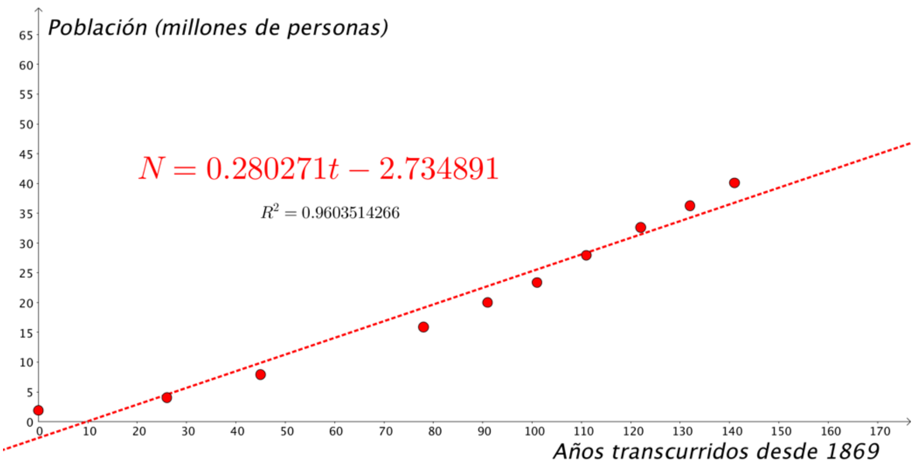


Figura 1: Ajuste lineal al crecimiento poblacional de Argentina

Se observa, en general, que la recta hace un ajuste bastante bueno de los datos. Su pendiente indica que, en promedio, a cada incremento de una unidad en el tiempo le corresponde un incremento aproximado de 280271 habitantes. Para ciertos intervalos de tiempo el modelo lineal proporciona una cantidad de habitantes superior a la arrojada por los censos, mientras que en otros es inferior.

Ahora bien ¿cómo podemos saber si es bueno el ajuste de la recta? Existen diversas formas de resumir el grado en el que una recta se ajusta a una nube de puntos. Se podría usar la media de los residuos, o la media de los residuos en valor absoluto, o las medianas de alguna de esas medidas, o alguna función ponderada de las mismas, etc.

Una medida de ajuste que ha recibido gran aceptación en el contexto del análisis de regresión es el coeficiente de determinación R^2: el cuadrado del coeficiente de correlación múltiple. Se trata de una medida estandarizada que toma valores entre 0 y 1 (0, cuando las variables son independientes y 1, cuando entre ellas existe relación perfecta). El coeficiente de determinación representa la proporción de la variación total de los valores de "y" que se pueden explicar por una relación lineal con los valores de "x". $R^2 \times 100$ se puede interpretar como el porcentaje de la variabilidad de la variable dependiente explicada por el modelo de regresión.

De manera que el modelo lineal es un buen ajuste para esta distribución de datos, pues el coeficiente de determinación R^2 explica en un 96.07 % la relación entre las variables tiempo y habitantes. Es decir, se estima que el 96.07% de las variaciones en la población pueden ser explicadas por variaciones en el tiempo. No obstante, para crecimientos poblacionales, los modelos lineales son aconsejables solamente en períodos cortos (6 meses, 1 o 2 años). Este modelo proyecta una población de 39585977 para el año 2020, valor que se encuentra por debajo de la proyección realizada por el INDEC (2013) para ese año, la cual es de 45376763, e incluso, de la cantidad de habitantes que tenía Argentina para el año 2010.

Si observamos el gráfico de la Figura 1 podemos advertir que la nube de puntos no está sobre una línea recta, pero sí sugiere que podría ajustarse un modelo polinómico. Entre ellos, el más simple es el modelo cuadrático. Nos valemos de un software para realizar el ajuste (GeoGebra en este caso) y el cálculo del coeficiente de determinación, ya que la intención es analizar modelos y su poder predictivo, más que realizar cálculos estadísticos, como se aprecia en la Figura 2.

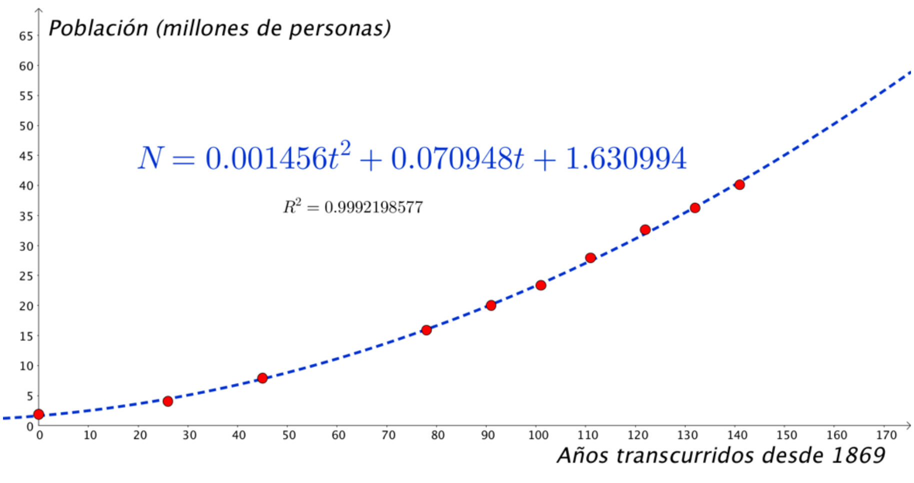


Figura 2: Ajuste cuadrático al crecimiento poblacional de Argentina

Este modelo se constituye en un muy buen ajuste de esta distribución de datos, el 99.92% de las variaciones en la población pueden ser explicadas por variaciones en el tiempo. Incluso, visualmente podemos apreciar que es mejor que el modelo lineal. Pronostica una población de aproximadamente 45544936 habitantes para el año 2020, siendo de 45376763 lo proyectado por el INDEC (2013) y de 56341262 habitantes para el 2040, contra 52778477 estimado por el INDEC (2013).

Podríamos continuar con otros modelos polinómicos de grado mayor a dos, pero nos interesa hacer un pasaje por diferentes ajustes. Consideremos ahora un modelo exponencial, en el cual se asume una tasa de crecimiento que se aplica a la población en cada infinitésimo de tiempo, y presupone una acumulación instantánea (Figura 3). Este modelo también es un buen ajuste para la distribución de estos datos, según lo explica el coeficiente de determinación R^2 en un 90.48 %. Estima una población de aproximadamente 62294257 habitantes para el 2020 y de 95641629 para el año 2.040, aunque son cifras bastante alejadas de las que proyecta el INDEC, que analiza los datos incorporando variables poblacionales que no usamos.

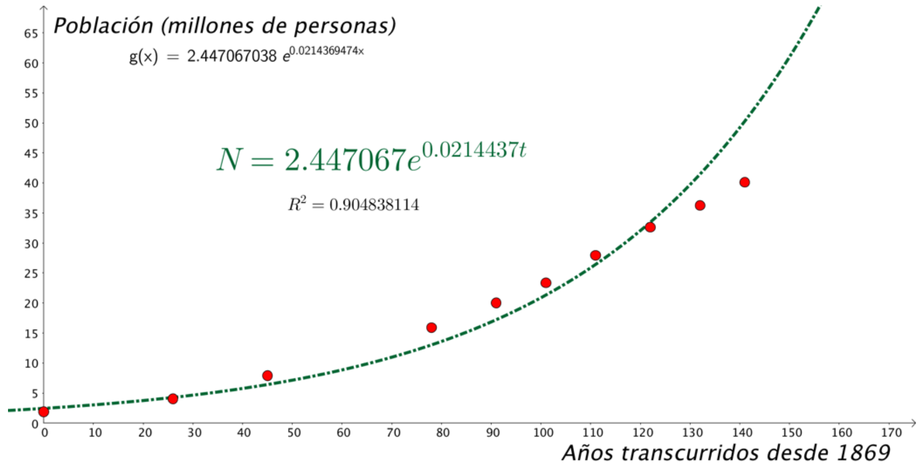


Figura 3: Ajuste exponencial al crecimiento poblacional de Argentina

Es importante destacar que en ausencia de limitaciones impuestas por el medio (espacios, alimentos, energías en general, etc.), y teniendo en cuenta que las especies biológicas están dotadas para producir mayor número de descendientes que los necesarios para mantener el tamaño de la población, el crecimiento no tendría cota. Los modelos anteriores pueden constituirse en importantes herramientas de predicción en estos casos y bajo las hipótesis enunciadas. Una población con muy pocos individuos prácticamente no enfrenta resistencia ambiental y, en consecuencia, su crecimiento es aproximadamente exponencial.

En los casos en que existan limitaciones del medio, como ocurre con la población humana en general, es necesario considerar otro recurso de modelización. A medida que la población crece, la resistencia ambiental aumenta, porque los recursos disponibles empiezan a escasear y los residuos se acumulan. En consecuencia, el crecimiento de la población se desacelera, apartándose cada vez más del modelo exponencial.

Cuando el tamaño de la población es igual a la capacidad de carga o sostenimiento, la tasa de crecimiento *per cápita* es cero y el tamaño de la población permanece en equilibrio. Se llama capacidad de carga al máximo número de individuos que el ambiente puede soportar. En ocasiones, una población puede estar por encima de esta cota. Cuando esto sucede, la tasa de crecimiento es negativa (la mortalidad es mayor que la natalidad) y la población disminuye. A veces, esto ocurre porque la capacidad de sostenimiento, en vez de permanecer constante, disminuye como consecuencia de cambios ambientales, inmigraciones, adaptación y resistencia ambiental con retardo, etc.

Este tipo de crecimiento se puede modelizar mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = a \cdot P \cdot (k - P)$$

donde a representa un factor de proporcionalidad. Por razones de conveniencia para el cálculo de esta ecuación diferencial, se puede introducir un nuevo factor $r = \frac{a}{k}$, que representa la tasa de crecimiento de baja población, cuando todavía no hay límites en los recursos. En este caso, el modelo se puede escribir:

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{k}\right)$$

donde r no es constante como en el modelo exponencial y la constante k representa el número de individuos que puede soportar un ecosistema sin sufrir un impacto negativo. En la realidad, la densidad de la población no suele nivelarse en un estado estable inmediatamente por debajo de k, sino que fluctúa arriba y abajo del mismo. En esta ecuación se puede determinar que $r \cdot P$ define un crecimiento proporcional al número de individuos, lo mismo que sucede en el modelo exponencial, mientras que $\frac{r}{k} \cdot P^2$, frena el crecimiento y cuando alcanza un número de individuos tal que $P = k$, el crecimiento se anula, teniendo en cuenta que $P' = 0$.

Para obtener el comportamiento de una población que se rige según la ecuación anterior, se debe resolver la ecuación diferencial, por ejemplo, por el método de separación de variables:

$$\frac{dP}{rP\left(1-\frac{P}{k}\right)} = dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{r}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{k-P}\right)dP = dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{r}ln\left(\frac{P}{k-P}\right) = t + C \;\Rightarrow\; \frac{P}{k-P} = Ae^{rt}$$

Al despejar P de esta última expresión tenemos: $P = \frac{Ake^{rt}}{1+Ae^{rt}}$. Si se impone la condición inicial $P(0) = 0$, se obtiene $A = \frac{P_0}{k-P_0}$; por lo tanto la solución general de la ecuación logística será: $P(t) = \frac{kP_0e^{rt}}{k+P_0(e^{rt}-1)}$.

Esta última recibe el nombre de *función logística, curva logística o curva en forma de S*. El parámetro P_0 determina la población inicial del sistema y debe permanecer mayor que cero y menor que k. No puede ser cero, porque la población inicial necesita de individuos para reproducirse. Tampoco puede ser igual a k, pues la población tendría escasa o nula capacidad de reproducción. Cuando transcurre mucho tiempo, la población se estabiliza, alcanzando una cota k que representa la capacidad de carga del sistema; esto es: $\lim_{x\to\infty} P(t) = k$

Una vez conocido el comportamiento logístico de la distribución de datos y sobretodo la expresión algebraica del modelo correspondiente, se pueden contestar las preguntas planteadas en el problema abordado. Esto es, determinar la cantidad de individuos que tendrá la población de Argentina en cualquier tiempo, como así también, el tiempo que transcurre en el cual la población logra alcanzar una determinada cantidad de individuos. Cabe aclarar que no se pueden obtener las respuestas requeridas por el problema a partir del solo uso de tablas o gráficos.

La curva logística describe un ciclo de crecimiento que consta básicamente de las siguientes fases: a) Una transición gradual de condiciones casi estacionarias a un aumento considerable de la población, b) una aceleración del ritmo de crecimiento hasta que se aproxima a un máximo, c) un retardo del ritmo de aumento y d) una transición gradual hacia condiciones casi estacionarias. Si no se desea abordar el problema partiendo del planteo y resolución de una ecuación diferencial, podemos apelar a realizar un ajuste logístico con un software, como queda reflejado en la Figura 4.

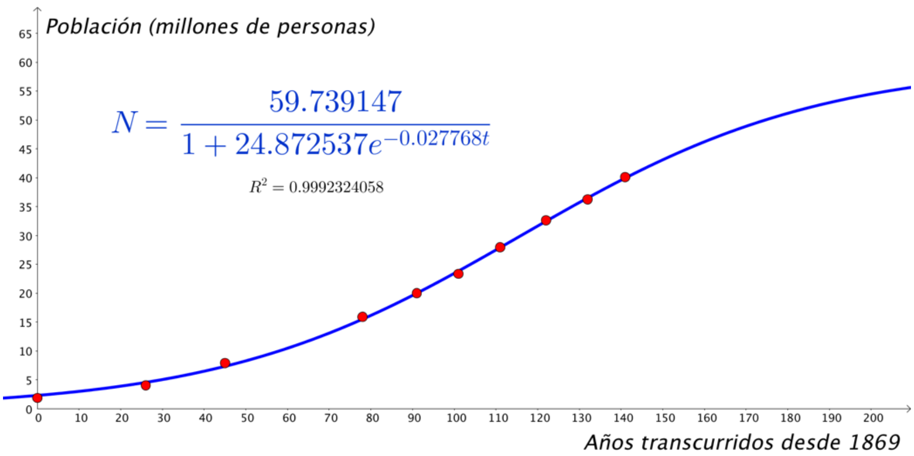


Figura 4: Ajuste logístico al crecimiento poblacional de Argentina

En este modelo se tiene que R^2 es 99.92% por lo que el mismo puede considerarse un buen ajuste para dicha distribución de datos. Se estima que la población en el año 2020 será de cerca de 43428176 habitantes y de 49146446 para el 2040. Ambos valores se encuentran por debajo de los proyectados por el INDEC (2013), e incluso por los estimados en el modelo polinómico de grado 2 que resultaba tener un buen ajuste. Realicemos ahora una comparación entre análisis de datos y modelos de ajustes. Comenzamos por recuperar cada uno de los modelos abordados en un mismo gráfico (ver Figura 5).

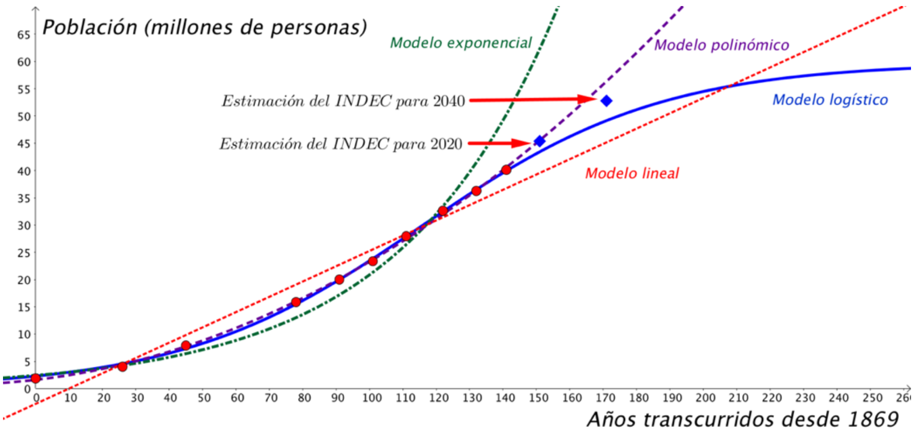


Figura 5: Diferentes modelos de ajustes al crecimiento poblacional de Argentina

Como se puede apreciar, existen importantes diferencias en las predicciones hechas por los diferentes modelos con respecto a la población de Argentina para los años 2020 y 2040. Si tenemos presente la estimación realizada por el INDEC (2013) sobre la población de Argentina para los años en cuestión, los valores se encuentran comprendidos entre los determinados por el modelo polinómico y el logístico, lo cual también se puede apreciar en el gráfico de la Figura 5.

Si tenemos presente los resultados del censo 2010, difundidos por el INDEC, en Argentina viven alrededor de 40117096 habitantes, lo cual representa un 10.6 % más que la década anterior. Esta cifra confirma que existe un crecimiento poblacional cada vez más lento. Ubica al país en una transición demográfica, lo cual significa que se aleja de los países de menor desarrollo, donde las tasas de crecimiento llegan al 3% anual, y se acerca a los países desarrollados, donde la tasa de natalidad es menor. La tasa del 10.6 % es esperable con las proyecciones que existían, las que estimaban un aumento de 1.5 % anual. La población argentina sigue creciendo, aunque con menor tasa de acuerdo con los últimos censos y entonces estaría en el tramo de retardo del ritmo de aumento del modelo logístico. Esto se podría interpretar como que todavía falta bastante tiempo para que la población se estabilice. Por estar en una etapa de crecimiento y además por considerar un breve lapso de tiempo de estudio (1869 - 2010), los modelos lineal, exponencial y cuadrático se ajustan bastante bien a la distribución de datos. Si se aumenta este lapso de tiempo de estudio, quizás se obtengan modelos que permitan predecir mejores resultados. Por lo expresado anteriormente, el modelo logístico sería, de los cuatro analizados, el que mejor ajusta el crecimiento poblacional del país a largo plazo, con las limitaciones que le impusimos al estudio.

Cabe destacar que rara vez se incorpora el modelo logístico a los programas de matemática, siendo que es uno de los demandados por las ciencias que estudian dinámicas poblacionales, propagación de enfermedades epidémicas, difusión en redes sociales, etc.

6.4. Conclusiones

Consideramos firmemente que existen otras formas de trabajar y hacer matemática en el aula, además de la tradicional en la que nos formamos la mayoría de los profesores. Un enfoque unificado de enseñanza de la matemática está más próximo a los campos profesionales de las carreras y no se descuidan los contenidos de matemática, que suelen ser una preocupación central de los profesores. Si bien no relatamos los procesos de evaluación que llevamos a cabo, las investigaciones realizadas con estudiantes muestran que se advierten logros significativos en los aprendizajes, no solo de conocimientos disciplinares, sino interdisciplinares.

Como contracara, tenemos que al profesor se lo pone en una situación incómoda e inusual, que deviene de no saberse todas las respuestas, porque entra en juego lo interdisciplinar. En este sentido, es necesario que nos involucremos en los conocimientos y lógica de otros campos disciplinares, fundamentalmente cuando impartimos clases en carreras no matemáticas. Por otro lado, tenemos a los estudiantes que suelen sentirse más cómodos en ambientes tradicionales de enseñanza de la matemática, y no en enfoques que demandan mayor protagonismo de ellos.

6.5. Referencias bibliográficas

Andonegui, M. (2004). Interdisciplinariedad y educación matemática en las dos primeras etapas de la educación básica. *Educere 8(26)*, 301-308

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en Educación Matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación*, *43*, 85-101

Chavarría, J. y Hidalgo, R. (2009). La historia e interdisciplinariedad en la Educación Matemática: Una experiencia con profesores de secundaria. *Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4(5)*, 139-154.

INDEC (2013). *Estimaciones y proyecciones de población 2010-2040: Total del país.* Buenos Aires, Argentina: Instituto Nacional de Estadísticas y Censos.

INFD (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática*. Buenos Aires: Instituto Nacional de Formación Docente y SPU.

Motta, R. (2002). Complejidad, educación y transdisciplinariedad. *Polis*, *1(3)*, 1–21

Nicolescu, B. (1996). *La transdisciplinarité. Manifeste*. Mónaco: Editions du Rocher.

7

Un dispositivo didáctico para cursos de Estadística en el Nivel Superior

Gabriela Pilar Cabrera

7.1. Introducción

En la actualidad la mayor parte de las escuelas secundarias, a nivel mundial, incluyen el análisis de datos y la probabilidad en el currículum de matemática. Sin embargo, muchos de estos estudiantes, así como aquellos de cursos de Introducción a la Estadística en la universidad, no poseen un bagaje matemático suficiente para el estudio formal de dichos temas. Sumado a esto, el modo algorítmico que se utiliza para presentar las principales ideas que subyacen el razonamiento estadístico no favorece su comprensión y aplicación (Batanero, Garfield, Ottaviani y Truran, 2000; Behar y Grima, 2004; Cobb, 2007).

Al respecto, Garlfield y Ben-Zvi, (2008) refieren que la Estadística en el nivel secundario y terciario debería parecerse menos a los cursos de matemática y más a una ciencia aplicada. Para Behar y Grima (2015), si bien la matemática hizo posible la construcción de los teoremas que sustentan la Teoría Estadística y la Teoría de Probabilidades, sin los cuales su aplicación sería muy limitada, la estadística no es matemática en su aplicación.

Por su parte, Rossman, Chance y Medina (2006) sostienen que la formación de profesores de estadística requiere la experiencia en el análisis estadístico de datos reales, que implican necesariamente la variabilidad, la extracción de conclusiones en el marco de la incertidumbre y la necesidad de familiarizarse con software estadísticos. En otras palabras, en los profesorados de matemática, la estadística debería de ser tratada como ciencia aplicada en su enseñanza y no como matemática propiamente dicha (Batanero, 2015).

En términos de Aliaga, Cuff, Garfield, Lock, Utts y Witmer (2005), la omnipresencia de la variabilidad de los datos distingue a la estadística de la matemática. Por ello y con el fin de promover el razonamiento estadístico, Garlfield y Ben-Zvi (2008) recomiendan que los estudiantes experimenten de primera mano el proceso de recolección y exploración de datos, y dispongan de una amplia experiencia en la elaboración de conclusiones en el marco de la incertidumbre. Dicho de otro modo: “es necesario crear espacios de trabajo y reflexión donde los conceptos estadísticos y los principios del pensamiento bajo incertidumbre puedan ser bien entendidos y adoptados bajo buenas prácticas del análisis contemporáneo de datos” (Di Rienzo, Casanoves, González, Tablada, Días, Robledo y Balzarini, 2013, p. 4).

Siguiendo esta línea de pensamiento y en búsqueda de resolver el problema de las dificultades que implica la enseñanza de estadística y su aprendizaje en carreras universitarias que no tienen una carga matemática importante en su formación, se lleva a cabo en la cátedra de Bioestadística de la carrera de Medicina Veterinaria de la Universidad Nacional de Villa María (UNVM) un proceso de investigación-acción continuo. Este proceso se inscribe en el marco de las definiciones de estudios a nivel internacional, que avalan el interés por re-pensar la pedagogía de los cursos introductorios de Estadística (Aliaga, Cuff, Garfield, Lock, Utts & Witmer, 2005; Ben-Zvi, Gil & Apel, 2007; Pratt, Ainley, Kent, Levinson, Yogui & Kapadia, 2011; Garfield, delMas & Zieffler, 2010; Tintle, VanderStoep & Swanson, 2009; Tintle, Chance, Cobb, Rossman, Roy, Swanson & VanderStoep, 2014; Trumpower, 2013; Kaplan, 2011; Rubin, 2013; Behar, Grima, Ojeda y Cruz, 2013).

Los estudiantes de Medicina Veterinaria cursan la asignatura Bioestadística en el segundo cuatrimestre de su primer año de cursado de la carrera. Previo a ello, disponen de un cursillo de Introducción a la Matemática de un mes duración y una carga horaria de 20 horas reloj en total. La situación descripta plantea un escenario con estudiantes que posiblemente dispongan de un bagaje insuficiente de conocimientos de Álgebra y Análisis Matemático; conocimientos requeridos para el tratamiento formal de la Estadística Inferencial.

Con relación a lo dicho y para dar respuesta a la necesidad de re-plantear el modelo pedagógico-didáctico en la enseñanza de la Estadística en cursos introductorios de nivel universitario, en el presente capítulo se describe un dispositivo didáctico dinámico, colaborativo, interactivo e hipertextual, situado en el contexto de las Ciencias Veterinarias.

Ahora bien, para el seguimiento y evaluación continua de la implementación de este dispositivo didáctico, se aplica el criterio de idoneidad didáctica global para las seis idoneidades parciales: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. Este proceso de estudio se orienta en las recomendaciones de Godino, Contreras y Font (2006), Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007) y Godino (2013).

7.2. Caracterización del dispositivo didáctico

7.2.1. Componentes del dispositivo didáctico

La Secuencia de Actividades para el proceso de aprendizaje de Bioestadística (SAB) es un documento dinámico, colaborativo interactivo, hipertextual, a la vez que situado en el contexto de las Ciencias Veterinarias. Se estructura en el marco de las definiciones de la dialéctica herramienta-objeto propuesta por Douady (1984). Según esta autora, los conocimientos han de ser tratados primero como herramientas para resolver situaciones problemas y luego como objetos de estudio, a partir de la construcción colectiva mediada por el docente (Cabrera y Bonyuan, 2010).

Cabe destacar que esta construcción colectiva se logra solo en el marco de una clase reflexiva. Litwin (1997) entiende que la clase reflexiva permite la construcción, adquisición y apropiación del conocimiento, fomentando la comprensión del estudiante, a partir de la utilización de un lenguaje de pensamiento durante la clase, de expectativas puestas en la reflexión del estudiante que acompañan al proceso reflexivo del docente, de la generación de hábitos en relación con el interrogarse y una disposición del pensamiento en términos de actitudes y valores.

Ahora bien, el conocimiento a aprender y por tanto a enseñar, *surge, se consolida y evalúa* a partir de una serie de escenarios que emergen de proyectos de investigación y/o extensión desarrollados en la carrera de Medicina Veterinaria de la UNVM. En la Figura 1, se mencionan las tres orientaciones que hacen al perfil del Médico Veterinario y dan sentido a los escenarios que componen la SAB. También se utilizan como escenarios posibles, resultados de investigaciones relacionadas con la Medicina Veterinaria disponibles en publicaciones académicas.

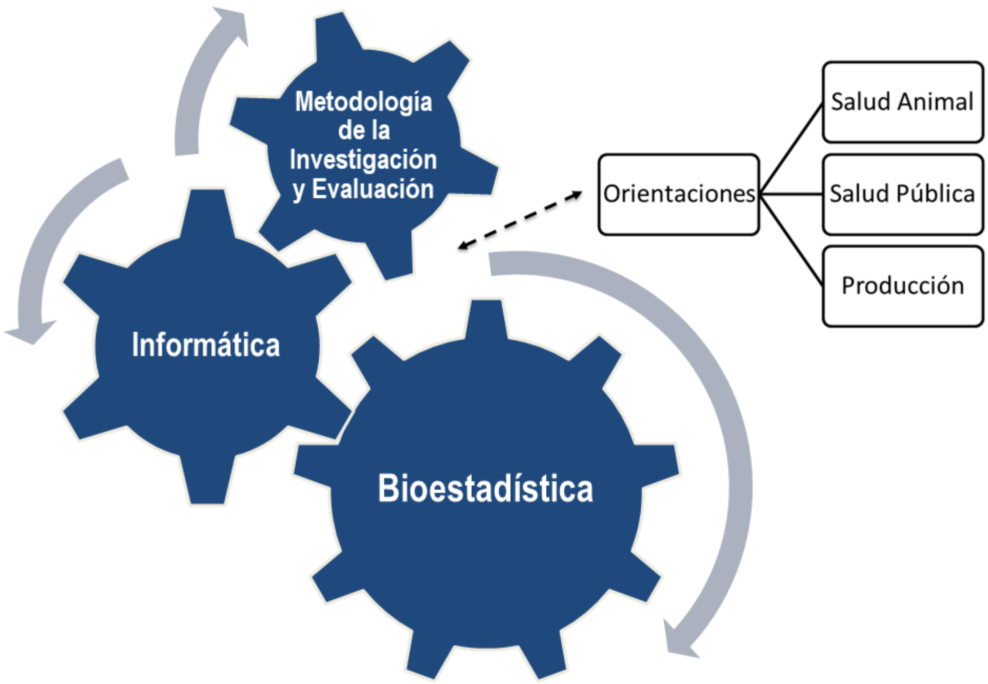


Figura 1: Contexto de la SAB

Cabe señalar que las asignaturas Bioestadística (segundo cuatrimestre del primer año de cursado en la carrera) y Metodología de la Investigación y Evaluación (cuarto año de cursado) constituyen el núcleo central en el que se abordan, en espiral cognitivo, los conocimientos y herramientas de Estadística Descriptiva e Inferencial. En tanto, en Informática (primer año), los estudiantes adquieren habilidad en el uso del software estadístico *InfoStat* y de la herramienta de planilla de cálculo Excel.

Para continuar con la descripción de este dispositivo didáctico, en la Figura 2 se presenta un esquema de la SAB, a modo de visualización de su dinámica estructural.

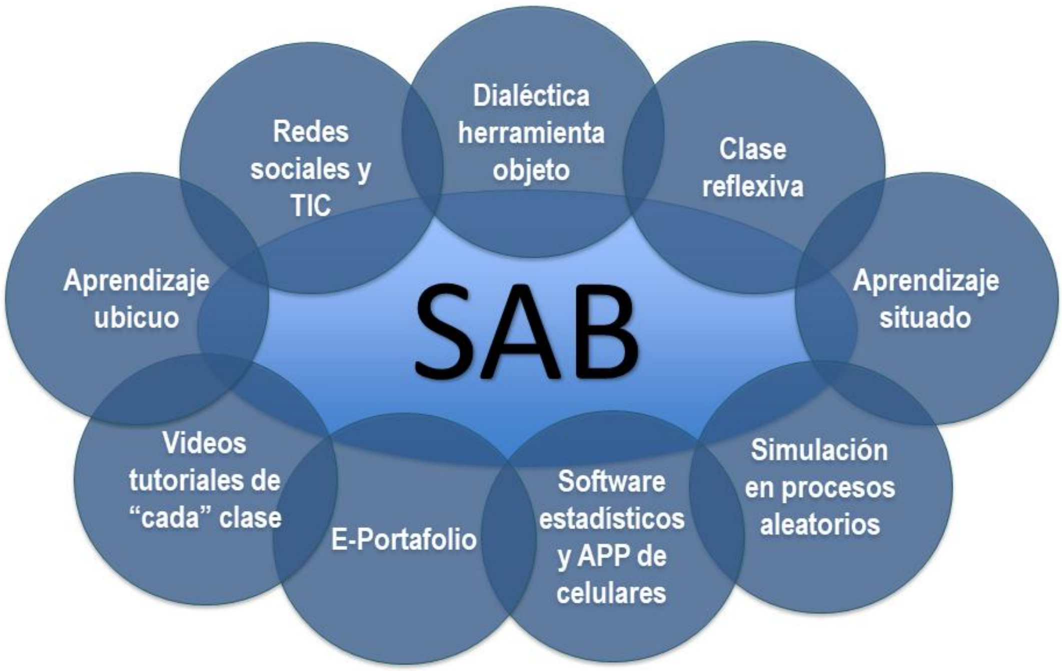


Figura 2: Dinámica estructural de la SAB

La dinámica estructural de este dispositivo didáctico tiene como centro vertebrador a la SAB. La SAB es un documento de Word dinámico, interactivo y colaborativo que se presenta en sucesivas versiones y se consigna con el nombre de archivo: *SAB-Unidad-Versión.* En el nombre de este archivo queda entonces indicado: la unidad del programa que se aborda y la versión.

Las sucesivas versiones se publican y comparten en un grupo cerrado de *Facebook*. Este espacio digital funciona como pizarrón electrónico, en que se publican consignas e indicaciones para la organización cotidiana de la tarea y el desarrollo de cada una de las clases. Quedan allí plasmadas dudas, aportes y comunicaciones entre docentes y alumnos como entre estudiantes.

La primera versión de la SAB se comparte antes de la clase en la que se trata por primera vez el "nuevo conocimiento". En esta, se proponen los escenarios en formato de casos de estudio y/o situaciones problemas y además, una serie de juegos de simulación. Al concluir la clase, se comparte la nueva versión de la SAB con las actualizaciones que plasman las intervenciones del docente, los aportes de los estudiantes y las vinculaciones con otros documentos de interés (textos, link, capítulos de libros). Todo aporte a las conceptualizaciones requeridas se inserta en formato de hipertexto con la opción de *Word "revisar" / "insertar comentarios"*. De este modo se obtiene un documento "hipertextual" construido de manera colaborativa, colectiva y *on-line.*

Es en este momento en el que los grupos de estudiantes se abocan al análisis de los casos de estudio y la resolución de los problemas indicados en el documento de SAB, ahora ya con las muestras aleatorias asignadas a cada grupo, y el equipo docente las genera y publica en el grupo de *Facebook*. Cada grupo de estudiantes aborda la resolución del problema de acuerdo con los datos que les fueron asignados, los resultados obtenidos se comparten en la cuenta de *Google Drive* y se analizan de manera colectiva en la clase siguiente del práctico.

El hecho de presentar muestras aleatorias para la resolución del caso de estudio en cuestión se sustenta en la recomendación de Moore (2004), con relación a que los que los datos se traten como si fueran una muestra aleatoria o procedieran de un diseño aleatorizado. En consonancia con esto, se concibe a las *simulaciones informáticas* como el principal insumo para el anclaje de los postulados teóricos y las correspondientes implicancias prácticas de los conocimientos estocásticos.

Cabe precisar y destacar el uso del software estadístico *InfoStat* (versión 2016) como herramienta de cálculo para las medidas y procedimientos estadísticos que se proponen en el programa de estudio de la asignatura. En términos de Moore (2004), los cálculos automáticos aumentan la capacidad de los estudiantes para resolver problemas, reducen la frustración y ayudan a los estudiantes a concentrarse en las ideas y en la identificación del problema más que en la mecánica de su resolución. Por tanto, el software estadístico *InfoStat* se constituye en el soporte principal para el análisis de los datos. Sumado a esto, los estudiantes desarrollan las competencias básicas para su correcta utilización.

Este proceso de construcción colaborativa y situada del conocimiento se completa con instancias de aprendizaje ubicuo gestionadas por medio de la red social *Facebook*, *Google Drive* y la serie de videos tutoriales creados por el equipo docente para cada clase que se publican en el canal de *YouTube*. Estos videos tutoriales refieren tanto a los conceptos y procedimientos desarrollados en la clase, como al modo en el que fueron abordados. Es así que los estudiantes disponen de todas las clases para ser "re-visadas" y "re-construidas" en un tiempo diferente al que se suceden. Esto da lugar a un entorno de aprendizaje ubicuo: el aprendizaje se transforma en una proposición de "en cualquier momento y en cualquier lugar", los procesos de aprender están integrados más a fondo al flujo de las actividades y las relaciones diarias (Burbules, 2014). Este entorno de aprendizaje ubicuo propicia, mediante los videos tutoriales realizados por el equipo docente, que algunos conocimientos sean abordados en una instancia "no presencial" situada en el contexto de la dinámica estructural del dispositivo didáctico.

Cada grupo de estudiantes almacena los registros de avances de sus aprendizajes en una cuenta de *Google Drive* que comparte con el equipo de docentes. El *E-Portafolio* posibilita un proceso de evaluación continua por parte del equipo docente, de co-evaluación por parte de los pares y autoevaluación de cada estudiante. Completo el *E-portafolio*, se presenta a los estudiantes la evaluación "simulación" o "ensayo de evaluación integradora" dos semanas antes de la evaluación integradora individual y escrita. Este ensayo de evaluación tiene por objetivo propiciar la consolidación de los conocimientos abordados durante toda la asignatura. En este momento, los estudiantes reconocen qué comprenden, cómo lo comprenden y aquello que aún no lograron comprender.

7.3. Ejemplos que componen el dispositivo didáctico

7.3.1. Escenario de organización de grupos y asignación de muestras aleatorias

La organización de las presentaciones orales de los grupos se construye juntamente con los estudiantes. Aparece aquí la necesidad de buscar un modo de organización y se propone que sean dos grupos por clase de práctico. Por ejemplo, una clase de 42 estudiantes y grupos de 3 estudiantes cada uno. La cuestión a resolver en los respectivos grupos es: *¿de cuántas maneras distintas podrían ocurrir las presentaciones orales por parte de los grupos?*

Los estudiantes proponen posibles configuraciones de presentaciones a partir de heurísticas. Como la cantidad de grupos resulta un número grande para probar con diferentes procedimientos heurísticos, se propone como estrategia pensar en un total de 6 grupos posibles. En la Figura 3, se muestra una de las heurísticas elaboradas.

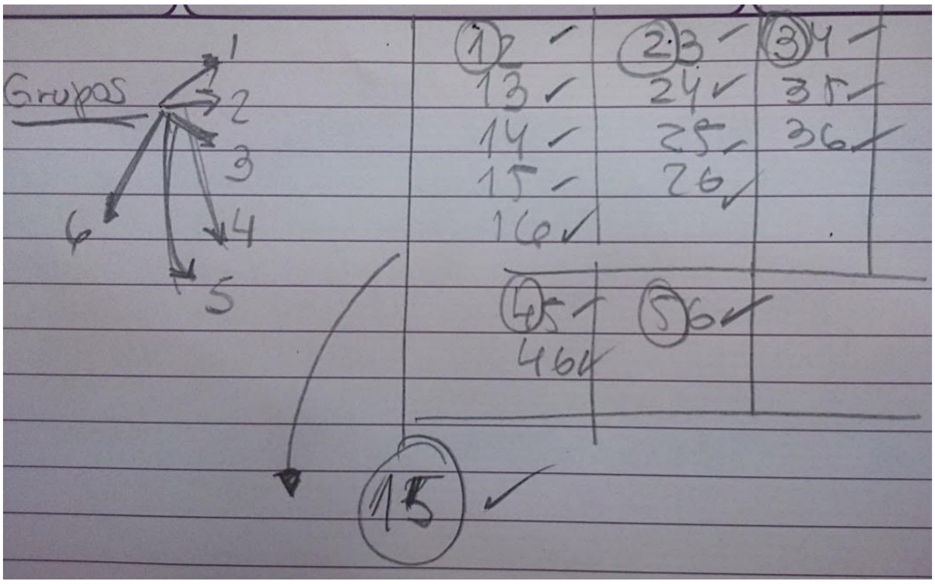


Figura 3: Procedimiento propuesto por uno de los grupos de estudiantes

A partir de las heurísticas propuestas por los estudiantes, se presenta la idea de *combinatoria* con apoyo de la *App* "Cálculo combinatorio". Se decide el uso del celular, ya que la mayoría de los estudiantes tienen acceso al mismo. Se obtiene $C_6^2 = 15$ maneras distintas de realizar presentación de a dos grupos, si son 6 los grupos posibles.

Ahora bien, para decidir cuál de las presentaciones ocurrirá, los estudiantes proponen realizar un sorteo y para ello, se usa la *App* que simula un sorteo en bolsa de papel. La aplicación solicita indicar si es un sorteo con o sin reposición, cuestión que da sentido a la conceptualización de *"experimentos aleatorios con y sin reposición"*.

Se realiza el sorteo en bolsa sin reposición y se propone una posible secuencia de presentaciones. Este procedimiento se vuelve a realizar dos veces más. A partir de la simulación efectuada, queda planteada la definición de *muestreo aleatorio simple* como un método de selección de "n" unidades de una población de tamaño "N", de tal modo que cada una de las muestras posibles tenga la misma oportunidad de ser elegida (Cochran 1983 en Di Rienzo *et al*., 2013).

Se retoman los 14 grupos y se procede al "sorteo sin repetición", hasta lograr la secuencia de presentaciones orales por parte de los grupos.

7.3.2. Ejemplo de actividad de investigación

Estas actividades implican la lectura previa a la clase de un determinado teórico, del material bibliográfico y el análisis de los escenarios a partir de esta información. Con los planteamientos de los posibles modos de abordar el análisis y/o la solución de los problemas se trabaja en la clase del teórico correspondiente, para construir la conceptualización de técnicas de muestreo aleatorio. A continuación, se presentan algunos de los escenarios que se trabajaron:

Escenario 1

En la ciudad de Villa del Rosario, el 4 de octubre de 2013 se llevó a cabo un Encuentro Latinoamericano de Estudiantes de Medicina de Veterinaria. Un grupo de estudiantes pensó en aprovechar este evento, al que asistieron estudiantes de otras partes de nuestro país y países vecinos para conocer, la percepción de los participantes acerca de ciertos mitos y verdades sobre los animales. Decidieron realizar una encuesta estructurada. Solicitaron a los organizadores del evento, el listado de los 850 participantes inscritos y los codificaron con un número del 1 al 850. A su vez, acordaron realizar la encuesta a una muestra representativa de estos 850 estudiantes. Usaron el software estadístico *InfoStat* para seleccionar una muestra aleatoria de tamaño 255 e indicaron en la lista de participantes, los seleccionados.

Cuestión: Analicemos los objetivos del estudio y representemos en un video la metodología de muestreo implementada.

Escenario 2

En la asignatura Metodología de la Investigación y la Evaluación, los estudiantes de manera colaborativa aportaron al desarrollo del proyecto de investigación: "Estudio seroepidemiológico de Brucelosis humana en estudiantes de Medicina Veterinaria de la UNVM". Acompañados por un grupo de docentes, diseñaron una encuesta semi-estructurada. Analizaron la factibilidad de aplicar la encuesta a todos los estudiantes activos en la carrera, ya que solo se disponía de dos semanas para implementar el instrumento. En un espacio de debate, se analizaron ventajas y desventajas de tres propuestas:

Propuesta 1: Realizar la encuesta a "todos" los estudiantes considerados activos en la carrera.

Propuesta 2: Seleccionar algunos de los estudiantes por medio de un muestreo aleatorio simple sin reposición.

Propuesta 3: Realizar un muestra aleatorio estratificado, considerando a cada curso como un estrato.

Cuestión: Analicemos las propuestas que se pusieron a consideración, teniendo como criterios la pertinencia en relación al objetivo del estudio y la factibilidad de implementación.

Escenario 3

¿Cuántos peces hay en una laguna? [1]

Supongamos que uno está en los alrededores de una laguna. Es decir, un cuerpo de agua de proporciones razonables. Uno sabe que allí es posible pescar, pero querría estimar cuántos peces hay. ¿Cómo hacer?

Naturalmente, estimar no quiere decir contar. Se trata de poder adquirir una idea de lo que hay. Por ejemplo, uno podría conjeturar que en la laguna hay mil peces o que hay mil millones de peces. Obviamente, no es lo mismo. Pero ¿cómo hacer?

Vamos a hacer juntos una reflexión. Supongamos que uno consigue una red que pide prestada a unos pescadores. Y se pone a pescar hasta conseguir mil peces. Es importante que cualquier procedimiento que se haga para conseguir los mil peces no los mate, porque habrá que devolverlos al agua vivos. Lo que se hace inmediatamente una vez que uno los tiene todos, es pintarlos de un color que no se borre con el agua o marcarlos de alguna manera. Digamos que, para fijar las ideas, los pintamos de amarillo. Los devolvemos al agua y esperamos un tiempo razonable, en donde "razonable" significa que les damos tiempo para que vuelvan a mezclarse con la población que habitaba la laguna. Una vez que estamos seguros, volvemos a sacar con el mismo método, otra vez, mil peces. Claro, algunos de los peces que obtenemos ahora estarán pintados y otros, no. Supongamos, siempre a los efectos de hacer las cuentas más fáciles, que entre los mil que acabamos de pescar ahora, aparecen sólo diez pintados de amarillo. Esto quiere decir que diez entre mil es la proporción de peces pintados que hay en la laguna.

No avance si no comprende este argumento. Si entendió, siga en el párrafo siguiente. Si no, piense conmigo. Lo que hicimos después de pintarlos es tirar los mil peces a la laguna y darles tiempo a que se mezclen con los que había antes. Cuando volvemos a sacar nuevamente mil peces, es porque ya les dimos tiempo para que se mezclaran todos y que no se note ninguna diferencia en la distribución entre los que pintamos antes y los que quedaron en el agua. Cuando volvemos a extraer los mil peces y vemos que hay diez pintados de amarillo, quiere decir que diez de cada mil de los que hay en la laguna están pintados. Pero si bien nosotros no sabemos cuántos peces hay, lo que sí sabemos es cuántos peces pintados hay. Sabemos que son mil. Pero entonces, si de cada mil, hay diez pintados (o sea, uno de cada cien), y en la laguna sabemos que hay mil pintados, y que los pintados representan el uno por ciento del total de peces, entonces, eso significa que el uno por ciento de los peces que hay en la laguna es mil. Luego, en la laguna tiene que haber cien mil peces. Este método, obviamente no exacto, provee una estimación, no una certeza. Pero, ante la imposibilidad de contar todos los peces que hay, es preferible tener una idea.

Cuestión: Realicemos el hipertexto del relato, a partir de las expresiones que refieren a la metodología de muestreo utilizada.

(1) Extraído de Paenza (2005)

7.3.3. Ejemplo de escenarios emergentes de proyectos de investigación

El escenario que se presenta a continuación constituye el eje vertebrador que da sentido a los contenidos implicados en el análisis exploratorio de datos, la estimación puntual y por intervalos de confianza para la media y varianza poblacionales, contraste de hipótesis y el análisis de la varianza.

Escenario 4

Niveles de Distrés en la cría de cerdos al aire libre

Los lechones en criaderos semi-intensivos al aire libre están expuestos a cambiantes condiciones ambientales como temperatura, radiación solar, horas luz y humedad; estos son factores difíciles de controlar y parecen afectar al bienestar animal generando distrés. En los sistemas intensivos bajo galpón, con las variables ambientales controladas, parecen producirse menos situaciones de distrés y en consecuencia mejor bienestar animal.

En una investigación realizada por un equipo de investigadores de la Carrera de Medicina Veterinaria de la UNVM, dirigidos por el Prof. M.V. Dante Berardo, se estudiaron los niveles de marcadores de distrés en lechones (antes del destete y después del destete) en sistema de crianza semi-intensivo al aire libre, en las cuatro estaciones del año. Entre estos marcadores se evaluaron: *nivel de glucemia (mg./dl.), nivel de cortisol (ug./ml.), nivel de creatinina (mg./l.) y nivel de urea (g./l.).* Estas mediciones se realizaron para muestras de quince cerdos tomados al azar, antes del destete y después del destete, en cada una de las cuatro estaciones del año.

Figura 4: Preguntas orientadoras del estudio a realizar

El uso de la App “sorteo en bolsa de papel”, como analogía del muestreo aleatorio simple, se implementa para la asignación de las muestras aleatorias a cada uno de los grupos de estudiantes. En la Figura 5, se tiene una porción del archivo de Excel con 200 muestras aleatorias para la variable aleatoria Nivel de Glucemia. Cabe señalar que estas muestras aleatorias fueron generadas por el equipo docente, con el método de simulación Montecarlo y siguiendo la distribución de probabilidad de las poblaciones subyacentes a los datos reales proporcionados por los investigadores. Cabe señalar que, para cada una de las variables aleatorias observadas en el escenario, se utiliza el mismo procedimiento de asignación. El hecho de que cada grupo trabaje con una muestra aleatoria de cada una de las variables en estudio posibilita que en las presentaciones orales se vuelva una y otra vez sobre los alcances y limitaciones de los métodos de Estadística Inferencial.

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Muestra 5	Muestra 6	Muestra 7	Muestra 8	Muestra 9	Muestra 10	Muestra 11	Muestra 12	Muestra 13	Muestra 14	Muestra 15	Muestra 16	Muestra 17
2	115,44	103,42	84,12	62,87	58,65	75,71	84,37	109,97	115,87	98,51	103,98	96,72	98,64
3	95,21	57,14	81,12	101,16	100,07	89,05	73,68	102,82	94,00	92,28	85,71	84,32	77,27
4	89,47	92,33	87,70	87,03	93,97	96,28	87,87	98,44	92,27	78,03	99,12	95,26	80,12
5	79,72	90,29	99,56	74,63	86,43	101,62	93,34	87,46	99,70	85,00	84,90	66,16	77,73
6	95,55	94,72	111,25	89,27	86,66	73,12	82,80	83,23	109,82	91,51	90,74	81,17	83,17
7	91,90	66,90	88,35	82,14	89,47	86,63	99,09	85,50	82,22	93,82	75,70	83,94	82,09
8	97,16	57,84	90,95	96,76	86,72	78,42	87,57	71,00	87,77	62,43	92,91	79,88	60,86
9	86,47	98,48	101,74	83,20	84,78	88,74	84,16	87,85	86,85	62,38	80,92	83,54	61,40
10	82,10	73,38	87,49	94,23	101,19	86,10	95,73	84,06	82,32	61,00	82,17	108,19	111,96
11	75,57	81,81	99,48	100,40	82,35	77,45	75,84	79,13	86,62	104,25	87,57	100,61	82,83
12	108,26	85,50	103,43	65,00	96,23	85,91	91,25	90,79	64,67	85,77	103,71	88,73	107,29
13	94,55	87,58	98,38	92,32	130,95	80,74	101,94	94,35	76,76	73,19	92,51	66,82	90,03
14	94,63	104,54	97,78	87,11	91,25	89,82	80,72	111,07	68,23	101,23	81,37	96,15	91,40
15	106,48	80,25	65,08	84,17	110,30	78,11	81,96	85,31	83,61	102,16	88,12	67,96	99,75
16	123,19	82,24	90,13	80,62	98,46	100,63	97,21	94,21	93,46	86,13	93,72	97,78	74,09
17													
18													

Otoño-pre / Primavera-pre / Verano-pre / Invierno-post / Otoño-Post / Primavera_Post / **Verano-Post**

Figura 5: Ejemplo de base de datos de muestras aleatorias para la variable aleatoria Nivel de Glucemia

7.3.4. Ejemplo de procesos de simulación con Excel y App de celular

Los juegos y simulaciones de experimentos aleatorios constituyen un andamiaje que propicia la comprensión de los procesos aleatorios. A continuación, se muestra la secuencia de dos simulaciones realizadas para la conceptualización de probabilidad a partir del enfoque frecuencial y el enfoque clásico, distribución empírica, variables aleatorias discretas y distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta.

Juego de simulación 1

Descarguemos la App "Dados 3D". Si se lanza un dado con forma de cubo, ¿qué número me conviene anticipar para ganar?

Este proceso de simulación se realiza con base en el registro de juego realizado en años anteriores y los registrados durante esta clase. La secuencia de cálculos se efectúa con el soporte *Excel*. Las Figuras 6, Figura 7, Figura 8 y Figura 9 corresponden a distribuciones empíricas de n repeticiones del experimento. A medida que n se hace más grande, la distribución empírica observada se aproxima a la distribución teórica que se muestra en la Figura 11. La distribución teórica resulta ser la distribución de probabilidad uniforme (Figura 10) de la variable aleatoria X: "$Número\ de\ la\ cara\ expuesta\ del\ dado$" .

Opciones	F. Absoluta	F. Rel.	F.Rel%
1	1	0,015	2%
2	8	0,121	12%
3	12	0,182	18%
4	20	0,303	30%
5	13	0,197	20%
6	12	0,182	18%
	66	1,000	100%

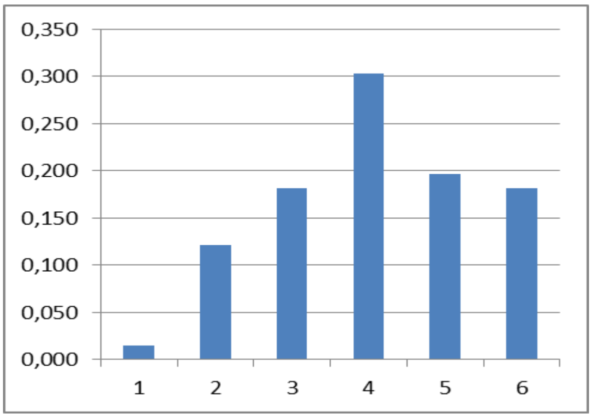


Figura 6: Distribución empírica resultante de lanzar un dado al aire 66 veces y observar la cara expuesta

Opciones	F. Absoluta	F. Rel.	F.Rel%
1	8	0,040	4%
2	23	0,116	12%
3	28	0,141	14%
4	41	0,206	21%
5	54	0,271	27%
6	45	0,226	23%
	199	1,000	100%

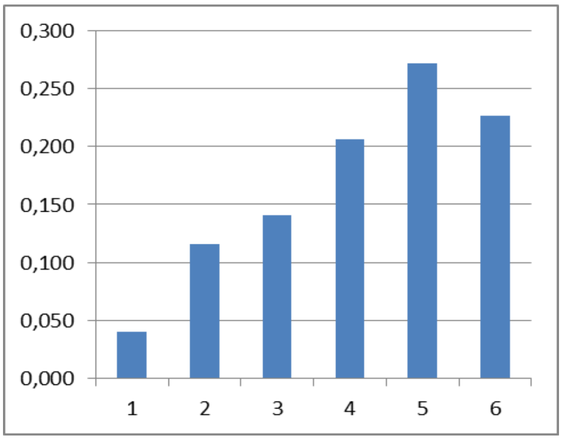


Figura 7: Distribución empírica resultante de lanzar un dado al aire 199 veces y observar la cara expuesta

Opciones	F. Absoluta	F. Rel.	F.Rel%
1	122	0,122	12%
2	144	0,144	14%
3	162	0,162	16%
4	184	0,184	18%
5	198	0,198	20%
6	189	0,189	19%
	999	1,000	100%

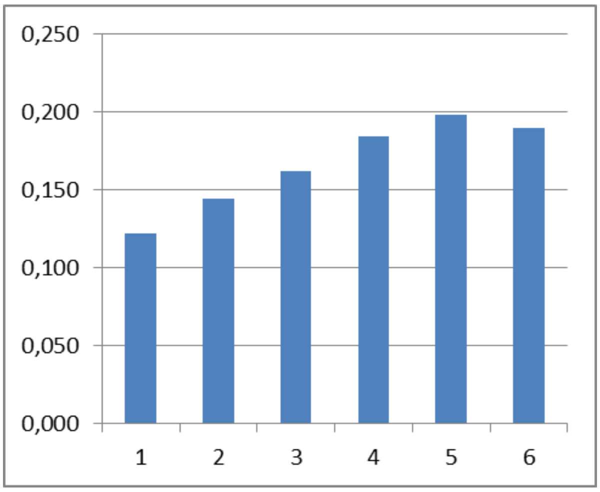


Figura 8: Distribución empírica resultante de lanzar un dado al aire 999 veces y observar la cara expuesta

Opciones	F. Absoluta	F. Rel.	F.Rel%
1	208	0,15	15%
2	233	0,17	17%
3	233	0,17	17%
4	232	0,17	17%
5	252	0,18	18%
6	236	0,17	17%
	1394	1,00	100%

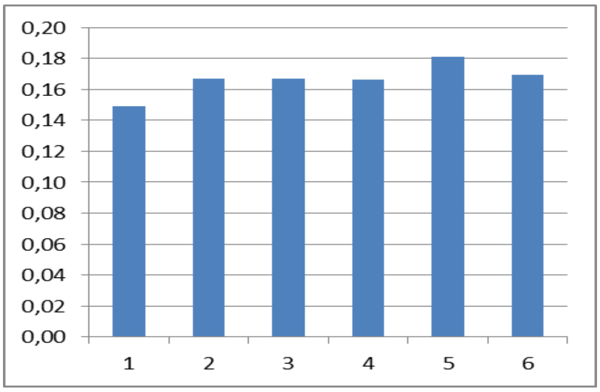


Figura 9: Distribución empírica resultante de lanzar un dado al aire 1394 veces y observar la cara expuesta

	X	P(X=xi)
x1	1	0,167
x2	2	0,167
x3	3	0,167
x4	4	0,167
x5	5	0,167
x6	6	0,167
		1

Figura 10: Función de distribución de Probabilidad para una Variable Aleatoria Discreta

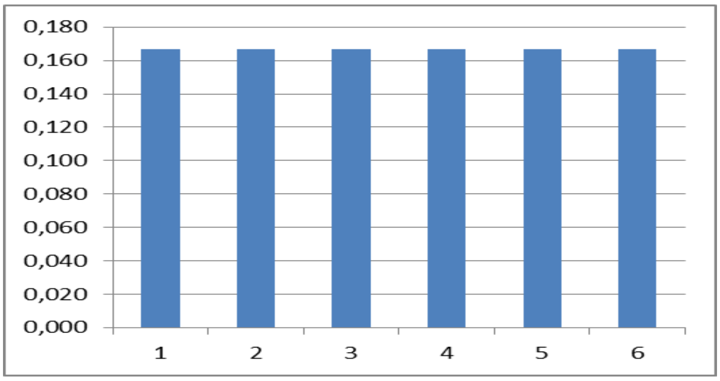
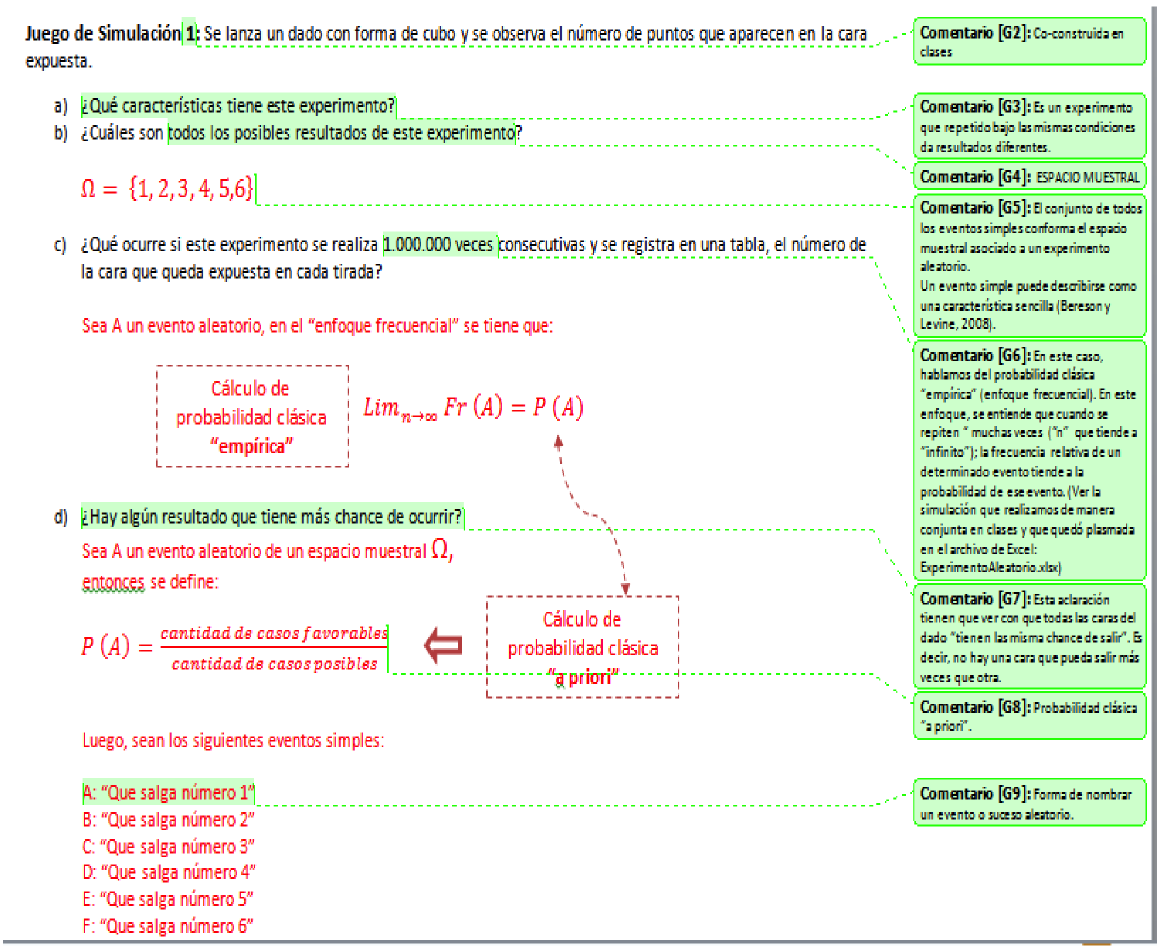


Figura 11: Modelo Uniforme de Distribución de Probabilidad

En la Figura 12, se presenta una imagen del documento de la SAB para la Unidad de Variables Aleatorias y Distribuciones de Probabilidad. Como se puede observar, la secuencia presentada a partir del juego de simulación 1 se plasma en el documento de la SAB durante la clase y con los aportes de los estudiantes. Quedan en este documento la síntesis del proceso realizado y los conceptos que emergen de este. Los comentarios son consignados *"on-line"* por el docente.



Juego de Simulación 1: Se lanza un dado con forma de cubo y se observa el número de puntos que aparecen en la cara expuesta.

a) ¿Qué características tiene este experimento?
b) ¿Cuáles son todos los posibles resultados de este experimento?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

c) ¿Qué ocurre si este experimento se realiza 1.000.000 veces consecutivas y se registra en una tabla, el número de la cara que queda expuesta en cada tirada?

Sea A un evento aleatorio, en el "enfoque frecuencial" se tiene que:

Cálculo de probabilidad clásica **"empírica"**

$$Lim_{n \to \infty} Fr\ (A) = P\ (A)$$

d) ¿Hay algún resultado que tiene más chance de ocurrir?

Sea A un evento aleatorio de un espacio muestral Ω, entonces se define:

$$P\ (A) = \frac{cantidad\ de\ casos\ favorables}{cantidad\ de\ casos\ posibles}$$

Cálculo de probabilidad clásica **"a priori"**

Luego, sean los siguientes eventos simples:

A: "Que salga número 1"
B: "Que salga número 2"
C: "Que salga número 3"
D: "Que salga número 4"
E: "Que salga número 5"
F: "Que salga número 6"

Comentario [G2]: Co-construida en clases

Comentario [G3]: Es un experimento que repetido bajo las mismas condiciones da resultados diferentes.

Comentario [G4]: ESPACIO MUESTRAL

Comentario [G5]: El conjunto de todos los eventos simples conforma el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
Un evento simple puede describirse como una característica sencilla (Bereson y Levine, 2008).

Comentario [G6]: En este caso, hablamos del probabilidad clásica "empírica" (enfoque frecuencial). En este enfoque, se entiende que cuando se repiten " muchas veces ("n" que tiende a "infinito"); la frecuencia relativa de un determinado evento tiende a la probabilidad de ese evento. (Ver la simulación que realizamos de manera conjunta en clases y que quedó plasmada en el archivo de Excel: ExperimentoAleatorio.xlsx)

Comentario [G7]: Esta aclaración tienen que ver con que todas las caras del dado "tienen las misma chance de salir". Es decir, no hay una cara que pueda salir más veces que otra.

Comentario [G8]: Probabilidad clásica "a priori".

Comentario [G9]: Forma de nombrar un evento o suceso aleatorio.

Figura 12: Imagen del registro hiper-textual plasmado en la SAB

Juego de simulación 2

Con la App "Dados 3D" ¡jugamos! Se lanzan dos dados con forma de cubo y se obtiene la suma de las caras. ¿Cuál de las sumas tiene más chance de ocurrir? Fundamenta tu respuesta.

La secuencia de resolución colectiva del juego, después de las realizaciones por grupos, se muestra en las Figuras 13, 14 y 15. De este modo, se sigue con la internalización de los conocimientos abordados a partir del juego de simulación 1, con otra distribución de probabilidades.

Sumas observadas	Frecuencia de ocurrencia	Frec. Rel	Frec. Rel.%
2	16	0,02	2%
3	36	0,05	5%
4	49	0,07	7%
5	75	0,11	11%
6	111	0,16	16%
7	98	0,14	14%
8	115	0,16	16%
9	71	0,10	10%
10	57	0,08	8%
11	43	0,06	6%
12	26	0,04	4%
	697	1,00	100%

Figura 13: Tabla de distribución de frecuencia de <u>697 repeticiones</u> del juego

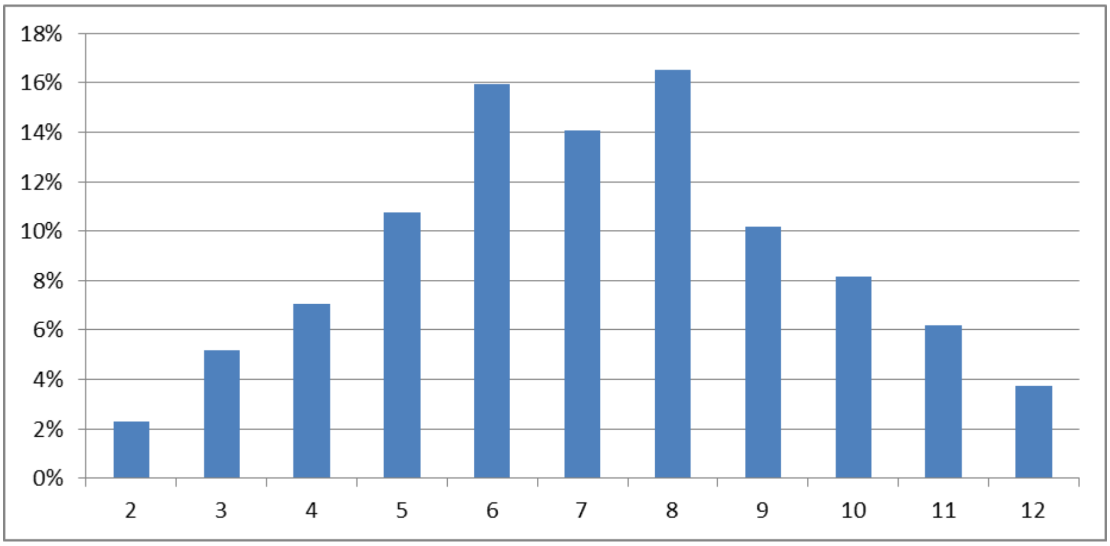


Figura 14: Distribución empírica resultante de <u>697 repeticiones</u> del juego

	X	P (X=xi)
x1	2	0,028
x2	3	0,056
x3	4	0,083
x4	5	0,111
x5	6	0,139
x6	7	0,167
x7	8	0,139
x8	9	0,111
x9	10	0,083
x10	11	0,056
x11	12	0,028

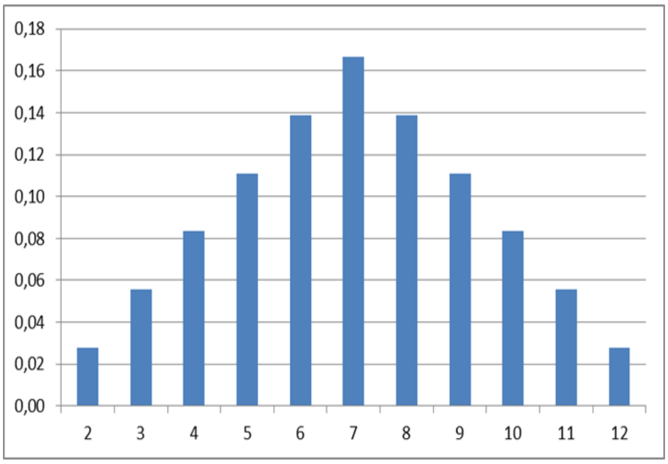


Figura 15: Función de distribución de probabilidades para la variable aleatoria discreta X: "$Suma\ de\ la\ cara\ de\ los\ dados$"

7.4. Reflexiones finales

Los conceptos y procedimientos desarrollados durante las clases fueron contextualizados en escenarios devenidos de proyectos de investigación y/o extensión del campo de actuación del Médico Veterinario. Los estudiantes se involucraron en el análisis de estos problemas, a partir de la conexión con la carrera que eligieron, situación que favoreció su acercamiento a los conocimientos propuestos en la asignatura. Cabe señalar como altamente positivo el acceso y tratamiento de estos conocimientos a partir de redes conceptuales. Por otra parte, la toma en consideración por parte del equipo docente del bagaje insuficiente de conocimientos de Álgebra y Análisis Matemático en la mayoría de los estudiantes, el planteamiento de la Estadística como ciencia aplicada y la incorporación del recurso informático como soporte de cálculo evitó el obstáculo cognoscitivo que supondrían las complejas fórmulas y teoremas de un enfoque algorítmico de la estadística. Esta característica, junto a otros indicadores que proponen Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007), le otorga al proceso de estudio una *idoneidad epistémica y cognitiva alta*.

Sumado a esto, se evidencia también *alta idoneidad mediacional.* El dispositivo didáctico puesto en marcha propone un conjunto variado de recursos y herramientas tecnológicas que apoyan de manera significativa el proceso de enseñanza y aprendizaje. Entre ellos: (a) el uso de software estadístico y aplicaciones de celulares como herramientas de cálculo y modelación de los procesos estocásticos, (b) la red social *Facebook* y el *Google Drive* como espacios de comunicación sincrónica y asincrónica entre docentes y estudiantes, y entre estudiantes. Esto último permitió un espacio de construcción colaborativa del aprendizaje y un medio de almacenamiento compartido.

Ahora bien, promover la confianza en las posibilidades de cada estudiante es una cuestión esencial en concepción e implementación del dispositivo didáctico. La dinámica de presentaciones orales por parte de los grupos y la reflexión sobre los procedimientos realizados se constituyen en el principal insumo para la evolución de la internacionalización de los conocimientos. Que los estudiantes pregunten y re-pregunten, planteen con entusiasmo y naturalidad sus estrategias de resolución, argumenten y contra-argumenten, propongan analogías extraídas de su vida cotidiana, permite suponer una *media idoneidad afectiva*.

Cabe destacar el carácter dialógico y cooperativo de cada una de las clases. El proceso de construcción colaborativa de las sucesivas versiones de la SAB es indicador de esto. Por otra parte, la posibilidad de comunicación sincrónica y asincrónica mediado por redes sociales potencia este carácter. Sumado a esto, la utilización de software estadístico y *App* de celular, herramientas tecnológicas cercanas a los estudiantes, aumentan sus posibilidades de comprensión. En consecuencia, la idoneidad interaccional alcanza de este modo la valoración como media.

Además, en la concepción del dispositivo didáctico, se tuvo en cuenta que no se dicta matemática en el plan de estudios de la carrera de Medicina Veterinaria de la UNVM. Es por ello que se tomaron en consideración los conocimientos previos con los que ingresan los estudiantes que llegan desde distintas partes de

Argentina y países limítrofes. Asimismo, el hecho de que muchos estudiantes manifiesten poca afinidad con la matemática supone un desafío para el equipo docente al intentar resignificar la matemática en el contexto de la estadística. Estas son algunas de las cuestiones que se contemplaron para alcanzar una *media idoneidad ecológica*.

De este modo, queda planteado un dispositivo didáctico con una idoneidad global alta; factible de mejora en el marco que en un proceso de reflexión-acción permanente.

7.5. Referencias bibliográficas

Aliaga, M., Cuff, C., Garfield, J., Lock, R., Utts, J. & Witmer, J. (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE): College Report.* American Statistical Association. Disponible en: http://www.amstat.org/education/gaise/

Batanero, C., Garfield, J. B., Ottaviani, M. G., y Truran, J. (2000). Investigación en Educación Estadística: Algunas Cuestiones Prioritarias. *Statistical Education Research Newsletter*, *1*(2), 2-6.

Batanero (2015). Investigación en Didáctica de la Probabilidad. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 69-72). Alicante, España: SEIEM.

Behar, R. y Grima, P. (2004). La Estadística en la Educación Superior. ¿Formamos pensamiento estadístico? *Ingeniería y competitividad*, 5 (2), 84-90.

Behar, R., Grima, P., Ojeda, M. M. y Cruz, C. (2013). Educación Estadística en cursos introductorios a nivel universitario: algunas reflexiones. En A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas* (pp. 343-360). Caracas, Venezuela: Vicerrectorado Académico Universidad Central de Venezuela.

Behar, R. y Grima, P. (2015). Estadística: Aprendizaje a largo Plazo. Algunas Reflexiones. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M. M. Gea y M. M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 2 (pp. 37-52). Granada, España: Universidad de Granada.

Ben-Zvi, D., Gil, E. & Apel, N. (2007). What is hidden beyond the data? Young students reason and argue about some wider universe. In J. Ainley & D. Pratt (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Forum for Research on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy* (pp. 11-17). Warwick, UK: University of Warwick.

Burbules, N. C. (2014). El aprendizaje ubicuo: nuevos contextos, nuevos procesos. *Entramados: educación y sociedad*, *1*(1), 131-134.

Cabrera, G. y Bonyuan S. (2010). *Matemática ni más ni menos. La enseñanza de la Matemática situada en contexto.* Córdoba, Argentina: Comunicarte.

Cobb, G. W. (2007). The introductory statistics course: a Ptolemaic curriculum? *Technology Innovations in Statistics Education*, *1*(1). 1-15.

Di Rienzo J., Casanoves F., González L., Tablada E; Días M., Robledo W. y Balzarini, M (2013). *Estadística para las ciencias Agropecuarias*. Córdoba, Argentina: Editorial Brujas.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire* (tesis de doctorado). París, Francia: Université Paris VII.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York, USA; Springer Science & Business Media.

Garfield, J., delMas, R. & Zieffler, A. (2010). Developing tertiary-level students' statistical thinking through the use of model-eliciting activities. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, XXVII*(2), 221-252.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8 (11), 111-132.

Kaplan, J. J. (2011). Innovative activities: How clickers can facilitate the use of simulations in large lecture classes. *Technology Innovations in Statistics Education*, 5(1). Disponible en: http://escholarship.org/uc/item/1jg0274b

Litwin, E. (1997). *Las configuraciones didácticas: una nueva agenda para la enseñanza superior*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Moore, D. (2004): *Estadística aplicada básica* (Segunda Edición). Barcelona, España: Antoni Bosh Editor.

Paenza, A. (2005). Matemática…¿estás ahí? *Sobre números, personajes, problemas y curiosidades*. Avellaneda, Argentina: Siglo XXI Editores Argentina.

Pratt, D., Ainley, J., Kent, P., Levinson, R., Yogui, C. & Kapadia, R. (2011). Role of context in risk-based reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(4), 322-345.

Rossman, A., Chance, B. & Medina, E. (2006). Some important comparisons between statistics and mathematics, and why teachers should care. In G. F. Burrill & P. C. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning with data and chance: Sixty-eighth NCTM yearbook* (pp. 139-150). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Scheaffer.

Rubin, A. (2013, August). Reflections on formality and informality with a short comment on uncertainty. Presentation at the *Eighth International Forum for Research on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy (SRTL8)*, Twin Shores, Minnesota.

Skovsmose, O. (2012). Escenarios de investigación. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 109-130). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Tintle, N., VanderStoep, J. & Swanson, T. (2009). An Active Approach to Statistical Inference. Hoboken, USA: John Wiley & Sons.

Tintle, N. L., Chance, B., Cobb, G., Rossman, A., Roy, S., Swanson, T. & VanderStoep, J. (2014). *Introduction to Statistical Investigations*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons.

Trumpower, D. (2013). Intuitive analysis of variance–a formative assessment approach. *Teaching Statistics*, 35(1), 57-60.

8

Concepciones iniciales sobre probabilidad en alumnos del profesorado de Matemática

Mario Álvarez, Marcel David Pochulu y Gabriela Pilar Cabrera

8.1. Introducción

Al iniciar estudios de estadística y probabilidad en la escuela secundaria, resulta habitual que la asignación de probabilidades se realice aplicando el enfoque clásico, a priori o de Laplace. En este, se parte del supuesto que se tienen espacios muéstrales finitos y equiprobables, donde la probabilidad para un conjunto se la define como la razón entre la cantidad de casos favorables y la cantidad de casos posibles (expresada como un porcentaje en la mayoría de los casos). Si se prescinde de un análisis reflexivo respecto al modo en que se interpreta esta razón o del vínculo que tiene este número en la repetición sucesiva bajo independencia del experimento, es posible que los estudiantes generen ciertas concepciones erróneas sobre el objeto matemático probabilidad. En particular, un aspecto que puede dificultar el cálculo de probabilidades desde el enfoque clásico o laplaciano reside en el hecho de considerar como equiprobables los espacios muestrales que no lo son.

Ahora bien, más allá de este planteo, se podría pensar que el estudiante no tiene la obligación de iniciar sus estudios en el nivel superior con concepciones satisfactorias sobre el enfoque clásico o laplaciano de asignación, pues al continuar su formación en el área de estadística y probabilidad, debería constituirlas en forma suficiente e incluso superarlas significativamente. La realidad muestra que no necesariamente se cumple de esta manera y existe un sinnúmero de trabajos que abordaron la temática que dan prueba de ello.

Kahneman, Slovic & Tversky (1982) estudiaron la “representatividad” en términos de la heurística, entre otras, que puede guiar los juicios de asignación que llevan a sesgos predecibles, y determinaron que los sujetos asignan probabilidades basándose en que el resultado debe representar de la mejor manera posible algún aspecto de la población de origen, razonar de este modo puede llevar a restar importancia al tamaño de la muestra o, equivalentemente, a la cantidad de veces que se realiza el experimento, con lo cual no se tendría en cuenta la variabilidad suscitada para el caso de muestras chicas. Este fenómeno también fue estudiado por Green (1991) en estudiantes de diferentes niveles educativos y determinó que para una sucesión aleatoria (como puede ser el resultado de lanzar una moneda sucesivamente), los alumnos esperaban la presencia de la equiprobabilidad, sin llegar a captar el sentido de la irregularidad de los resultados obtenidos en pequeñas muestras con respecto a muestras grandes.

Otro elemento a tener en cuenta para el estudio de la aplicación del enfoque clásico o laplaciano es la concepción de aleatoriedad. Respecto a ella, Azcárate, Cardeñoso y Porlán (1998), afirman que habitualmente es considerada como un concepto "obvio" y su significado no es analizado con profundidad durante el desarrollo de los cursos. Sostienen que se puede suponer que determinados tipos de concepciones sobre ella pueden ser un claro obstáculo para la comprensión de la naturaleza probabilística de ciertos aspectos de la realidad. Lecoutre (1992), en tanto, menciona la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos elementales asociados a cualquier experimento aleatorio. Explica que este sesgo en el cálculo de probabilidades, incluyendo el enfoque clásico, ocurre cuando se considera que el resultado del experimento "depende del azar" o "es aleatorio" y, en consecuencia, todos los posibles resultados son equiprobables (con probabilidad asignada por Laplace de 1/n), sin considerar algún tipo de regularidad estadística, como por ejemplo la ley de los grandes números.

En el trabajo de Lavalle, Micheli y Boché (2003), se analizan las respuestas a un conjunto de situaciones problemáticas vinculadas con la asignación de probabilidades en alumnos del profesorado en matemática, después de haber cursado la materia "Probabilidad y Estadística". Puntualmente les presentaron tareas para aplicar el enfoque clásico o laplaciano y detectaron razonamientos inapropiados debidos al descuido del tamaño de la muestra, entre otros errores. Por su parte, Díaz (2003) analiza el efecto de la instrucción sobre los sesgos en el razonamiento probabilístico y concluye que la instrucción en la teoría de probabilidades no es suficiente para superar los errores que cometen los estudiantes. Postula la necesidad de confrontar los razonamientos intuitivos realizando los experimentos estocásticos, también sugiere el uso de simulaciones.

Garfield (1995) indica que la enseñanza efectiva de la probabilidad debe apoyarse en el conocimiento previo sobre las concepciones de los estudiantes, ya que cuando se enseña algo nuevo, ellos construyen nuevo conocimiento conectando la nueva información con la que habían asumido previamente como correcta. En este sentido y aludiendo a la formación de futuros profesores, Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano & Rodríguez (2006) advierten que sin una formación específica, los docentes tendrían que confiar en sus creencias e intuiciones, con frecuencia erróneas, y que estos elementos incorrectos se podrían transmitir a sus estudiantes como lo han comprobado en el caso de la probabilidad.

Situándonos en el contexto de formación de profesores de matemática y previo a iniciar un curso de Probabilidad y Estadística cabe preguntarse: ¿Qué concepciones iniciales tienen sobre probabilidad los futuros profesores? ¿Guardan relación estas concepciones con los estudios realizados hasta la fecha en Educación Estadística?

La noción de concepción se entiende en este trabajo de la siguiente manera:

> Una concepción está determinada por un conjunto relativamente organizado de conocimientos utilizados con bastante frecuencia, y conjuntamente, sobre un conjunto de situaciones (para el cual son pertinentes, adecuados, útiles, etc.), y que se manifiestan mediante un repertorio relativamente estable y limitado de comportamientos, lenguajes, técnicas, etc. (Antibi et Brousseau, 2000, p. 20)

8.2. Marco teórico de referencia

Para este trabajo de investigación se consideró el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) como marco teórico y metodológico dentro de la Didáctica de la Matemática propuesta por Godino (2000, 2002), Godino, Batanero & Font (2007) y colaboradores.

En particular, se utilizaron los constructos de configuración epistémica y configuración cognitiva, donde se articulan seis objetos primarios: situación problema, conceptos, propiedades o proposiciones, procedimientos, argumentaciones y lenguaje (Figura 1). Estas configuraciones son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, constituyendo los elementos del significado de un objeto matemático particular. Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994).

En las configuraciones epistémicas/cognitivas, las situaciones problemas son las que le dan origen a la propia actividad matemática y, al mismo tiempo, motivan la aparición del conjunto de reglas. El lenguaje, en tanto, sirve de instrumento para accionar en la actividad matemática que acontece. Los argumentos los entendemos como prácticas que aparecen para justificar el conjunto de reglas y están regulados por el uso del lenguaje que, por su parte, sirve de instrumento para la comunicación.

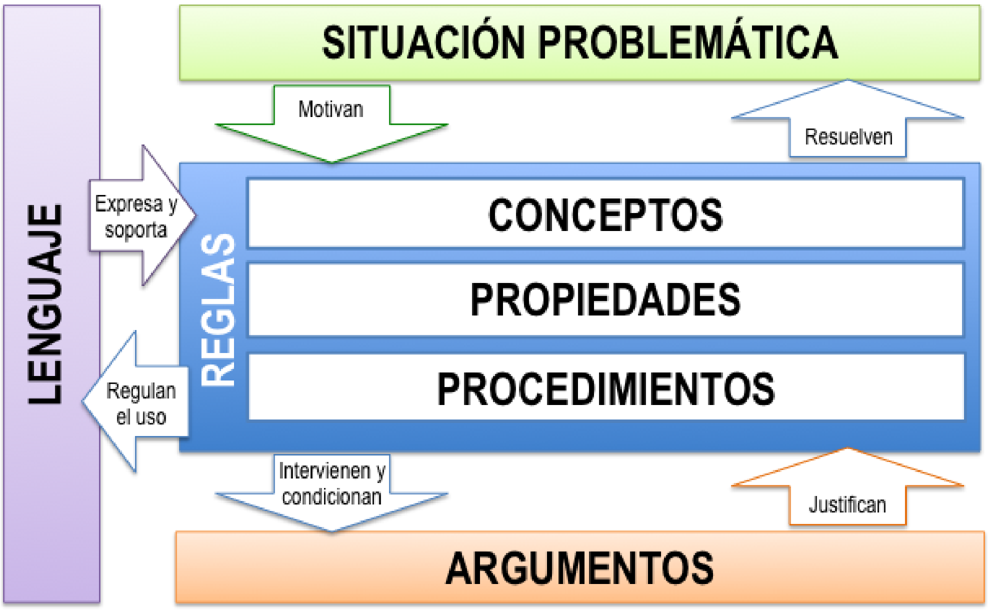


Figura 1: Configuración Epistémica/Cognitiva adaptada de D'Amore, Font y Godino (2007)

8.3. Acerca de la metodología aplicada

El trabajo se basó en el análisis e interpretación de 3 tareas, cuyo objetivo fue recuperar concepciones previas sobre la aplicación del enfoque clásico o laplaciano de probabilidad de 19 futuros profesores de matemática. Los estudiantes se encontraban iniciando el curso de "Probabilidad y Estadística 1", correspondiente al segundo año del Profesorado en Matemática del Instituto Profesorado Concordia D-54, provincia de Entre Ríos, durante el año académico 2017.

El diseño metodológico que se consideró fue de tipo exploratorio (se indagó sobre las concepciones iniciales de los alumnos), descriptivo (se realizó una caracterización de las anteriores), de corte etnográfico (se buscó comprender los acontecimientos tal y como los interpretan los sujetos investigados, a través de una inmersión en su pensamiento y práctica) y hermenéutico (se hicieron interpretaciones sobre las interpretaciones que hacen los estudiantes). El enfoque del análisis fue de tipo cualitativo, puesto que el objeto de estudio no se constituye como algo que se pudiera cuantificar y operar cuantitativamente con ello. Tampoco se pretendió realizar inferencias de los resultados obtenidos debido a que el muestreo fue no probabilístico.

La recolección de los datos se hizo a través de una guía escrita de situaciones-problemas de resolución individual. Los alumnos no habían cursado probabilidad y estadística en algún lugar de estudios terciario y/o universitario.

El instrumento construido ad hoc se diseñó con el propósito de que cada tarea planteada pudiera representar alguna familia de problemas que pertenezcan al significado de la aplicación del enfoque clásico o laplaciano de probabilidad. Para el diseño, también se consideró que los contextos resultaran de índole cotidiana o fácil interpretación, ya que sería el primer contacto que los estudiantes tendrían con problemas de aleatoriedad y probabilidad en el nivel superior. Algunos ítems se formularon con preguntas abiertas y en otros se dieron opciones, aunque se pidió la justificación de la elección.

Cabe destacar que la intención de presentar opciones de respuestas está relacionada con las concepciones señaladas por los estudios realizados sobre la temática y tuvieron como objetivo promover la exploración de las concepciones iniciales del alumno.

De las producciones de los estudiantes (prácticas operativas y discursivas) se realizó una configuración cognitiva, la cual se contrastó con la configuración epistémica construida a priori para cada una de las tareas.

8.4. Análisis didáctico de las producciones de los alumnos

Para determinar las concepciones iniciales que tienen los futuros profesores de Matemática sobre probabilidad aplicando el enfoque clásico o laplaciano, se les presentaron las siguientes 3 situaciones problemas:

Problema 1

Se tienen tres dados legales de color rojo, que se arrojan al azar y se observan las caras superiores. Se consideran los siguientes casos posibles:

a) que salgan en los tres dados el 5,

b) que salgan un 3, un 5 y un 2.

¿Consideras que alguno de los dos eventos tiene más posibilidades de ocurrencia? Justificar la respuesta.

Problema 2

Se tiene una caja de un metro cúbico repleto de bolas blancas y negras en proporciones iguales (50% y 50%). Se pide ordenar los siguientes tres eventos según consideres de "mayor posibilidad de ocurrencia" a "menor posibilidad de ocurrencia", justificando la respuesta:

I. Obtener 7 blancas al extraer al azar 10 bolas.

II. Obtener 70 blancas en 100 extracciones al azar.

III. No habría diferencia entre los eventos anteriores en cuanto a la posibilidad de salir.

Para el último problema tomamos una situación que proponen Batanero & Serrano (1999, p. 564).

Problema 3

Se pidió a cuatro niños que lanzaran una moneda legal 40 veces y anotaran los resultados obtenidos. Luego del experimento, se corrió el rumor que algunos efectivamente tiraron la moneda y otros, posiblemente, reconocieron que hicieron trampa para anotar los resultados. Se ha indicado con C para "cara" y + para "cruz". A continuación te presentamos sus producciones:

María: +++C++CC+++C+CCCCC+C+C++C+CC++++CCC+CC+CC

Daniel: C+C++CC+C+CC++C++CC++C+CC++C+C+C+C+C++C+

Martín: C+++C++CCC+C+++++C+C+CC+C++CCCC+++C++CCC

Diana: C+++C++C+C+++C++++CC+++C++C++C++++C+++C+

a) ¿Considerarías, a juzgar por los resultados obtenidos, que algún/os hizo/hicieron trampa? Justificar indicando quién/es de ellos y por qué.

b) Ahora escribe cómo se te ocurre que podría ser la secuencia de "cara" y "cruz" si lanzaras una moneda 20 veces. Explicita la secuencia, tal como se te ha presentado en el ítem anterior.

Presentamos a continuación el análisis a priori realizado sobre la primera situación problema del instrumento con su correspondiente configuración epistémica y, a modo de ejemplo, dos resoluciones realizadas por los estudiantes junto a una configuración cognitiva. No obstante, las conclusiones devienen de efectuar el análisis de las 3 tareas del instrumento y de las 57 configuraciones cognitivas (3 por cada uno de los 19 estudiantes).

El problema está dado en un contexto extramatemático y conlleva a establecer la probabilidad de ocurrencia de uno u otro evento usando la probabilidad a priori.

El experimento se puede suponer aleatorio, ya que al repetirse bajo las mismas condiciones no se podría establecer el resultado obtenido (concepto).

El espacio muestral asociado a este experimento es el conjunto de todas las posibles ternas que, en este caso, tendría un total de 6 x 6 x 6 = 216 elementos, aplicando el principio de multiplicación (concepto y procedimiento).

Si bien se dice que los dados son del mismo color, las frecuencias empíricas en un número grande de repeticiones indican que las ternas del espacio muestral de valores diferentes tienen mayor frecuencia relativa que aquellas donde haya repeticiones (propiedad). Por lo tanto, sería de esperar que tenga mayor posibilidad de ocurrencia lo que manifiesta el ítem (b), que se obtenga un 3, un 5 y un 2, ya que la cantidad de casos favorables es 6, cantidad que se puede obtener con alguna técnica de conteo (concepto y procedimiento) o construyendo una tabla (procedimiento).

Frente a un solo caso favorable para la terna (5,5,5), desde el enfoque clásico o laplaciano la relación sería la siguiente: $\frac{6}{216} \approx 0{,}0278 > \frac{1}{6} \approx 0{,}0046$. La configuración epistémica resulta:

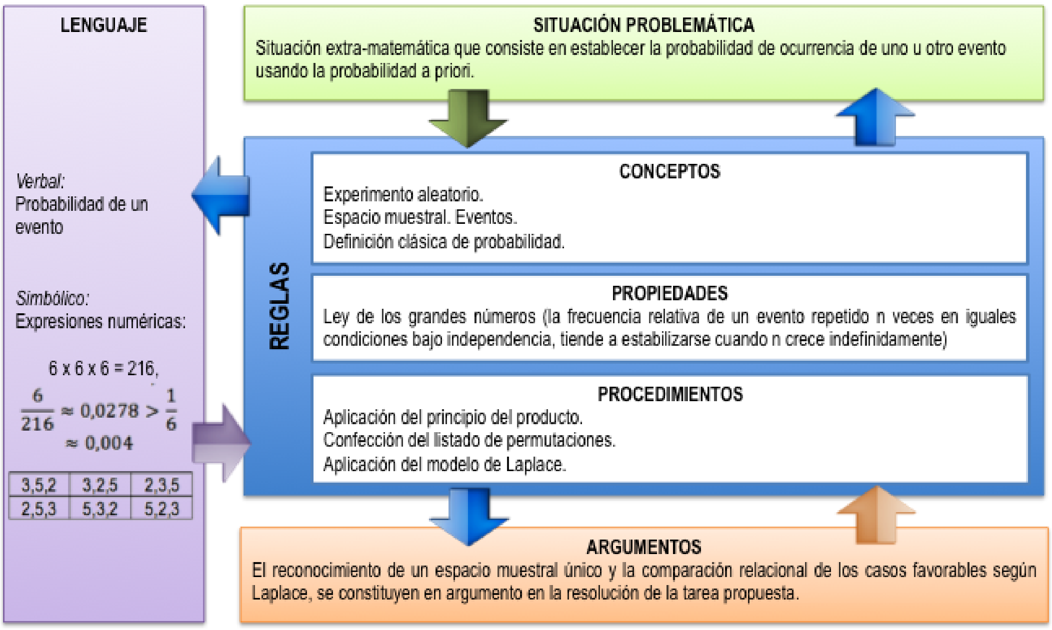


Figura 2: Configuración epistémica asociada a la situación problema

Veamos ahora un análisis de las prácticas operativas y discursivas del alumno A1 para esta situación problema (Figura 3).

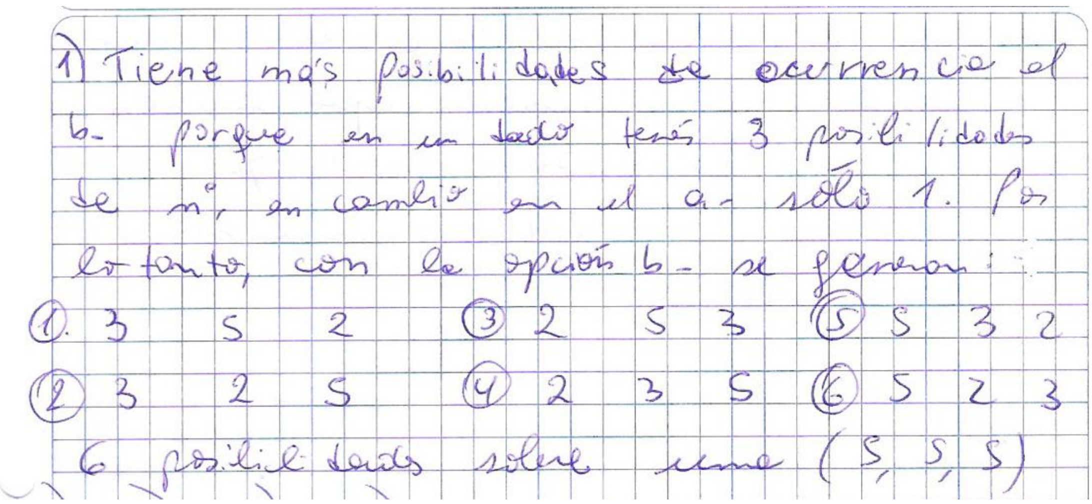


Figura 3: Resolución de A1 a la primera situación problema

Para este caso, el estudiante responde correctamente que tiene más posibilidades de ocurrencia el ítem (b). Reconoce el carácter equiprobable del espacio, esto se puede ver cuando razona que tiene "3 posibilidades" al considerar el evento de números distintos (argumento).

Realiza un listado de las posibles disposiciones que pueden tener los valores 3, 5 y 2 (procedimiento) y las compara con las disposiciones para los números 5, 5 y 5. De esta forma, verifica las condiciones para la aplicación del enfoque clásico (concepto y procedimiento), más allá que no explicita el cálculo de las razones para cada caso.

La configuración cognitiva para este alumno que respondió y argumentó correctamente sería la siguiente:

Figura 4: Configuración cognitiva del alumno A1

Para esta misma situación problema analizamos las prácticas operativas y discursivas del alumno A2 (Figura 5).

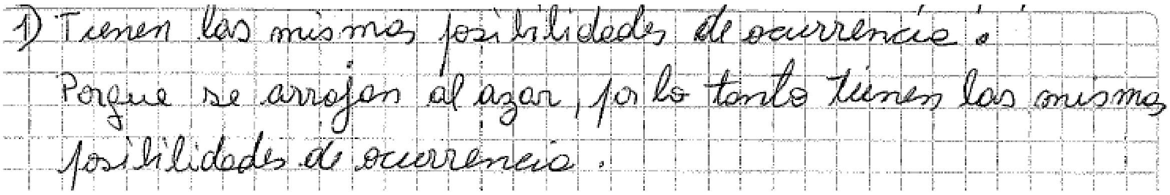


Figura 5: Resolución del alumno A2

Su respuesta es incorrecta, pero advierte que se trata de un experimento aleatorio (concepto) y reconoce como equiprobable eventos que no lo son (concepto y procedimiento). Este sesgo en la asignación de probabilidades se puede asociar a una concepción de que, en los experimentos aleatorios, para la asignación de probabilidades "todo depende del azar" y, coincidiendo con Lecoutre (1992), asigna la misma probabilidad a todos los eventos.

En general, para esta situación problema, la mitad de los alumnos aproximadamente respondió correctamente, pero pocos manifestaron en su escrito una justificación convincente.

El otro sesgo encontrado en forma significativa fue el de interpretar que la razón entre los casos favorables y los casos posibles representa la proporción de las veces de ocurrencia del evento de interés, independientemente del tamaño de la muestra y/o de la cantidad de repeticiones independientes del experimento. Esta concepción errónea, en términos de Kahnemann y Tversky (1982), se corresponde con la heurística de "representatividad".

8.5. Reflexiones finales

Las herramientas teórico-metodológicas del EOS (configuración epistémica y configuración cognitiva) han permitido comparar la pertinencia en el uso de los objetos primarios utilizados por los futuros profesores de matemática. Se han encontrado elementos erróneos en sus concepciones, en la misma línea que los antecedentes citados en otras investigaciones que tomaron el mismo objeto de estudio.

En este sentido, se pueden puntualizar dos ejes centrales en las concepciones manifestadas por los estudiantes:

- Una concepción errónea de considerar un espacio muestral equiprobable, cuando en verdad no lo es. Esto hace que, para el problema de los tres dados, consideren que "todo depende del azar" y que los eventos pedidos tienen, consecuentemente, la misma probabilidad de ocurrencia.
- Una concepción errónea de interpretar que el resultado obtenido desde el enfoque de Laplace es la proporción esperada de ocurrencias para cualquier tamaño muestral. Por lo tanto, no distinguen la validez de su interpretación que solo tiene sentido para muestras grandes (por la ley de los grandes números).

El hecho que futuros profesores cuenten con estos elementos erróneos, teniendo antecedentes de investigaciones que concluyen que la instrucción formal no garantiza su superación, es un punto de mucho interés para los formadores de estos alumnos a la hora de diseñar las actividades para esta unidad didáctica.

8.6. Referencias bibliográficas

Antibi, A. et Brousseau, G. (2000). Le dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20 (1), 7-40.

Azcárate P., Cardeñoso J.M. y Porlán R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las ciencias*, 16 (1), 85 – 97.

Batanero, C. & Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. Journal for Research in Mathematics Education, 30 (5), 558-567.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradìgma,* 28(2), 49-77.

Díaz C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la estadística. En Universitat de Lleida (Eds), *Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa (pp. 3611-3621).* Lleida, España: Universitat de Lleida.

Garfield, J. B. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review,* 63(1),23-54.

Godino J. D. (1996). Mathematical objects: their meanings and understanding. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 417 – 424).* Valencia: CIGPME.

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión en matemáticas. *Uno,* 25, 77-87.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39 (1-2), 127-135.

Green D. (1991). A longitudinal study of pupils' probability concepts. In D. Vere-Jones, S. Carlyle & B.P. (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320-328). Voorburg, Netherlands: International Statistical Institute.

Kahneman D., Slovic P. & Tversky A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press.

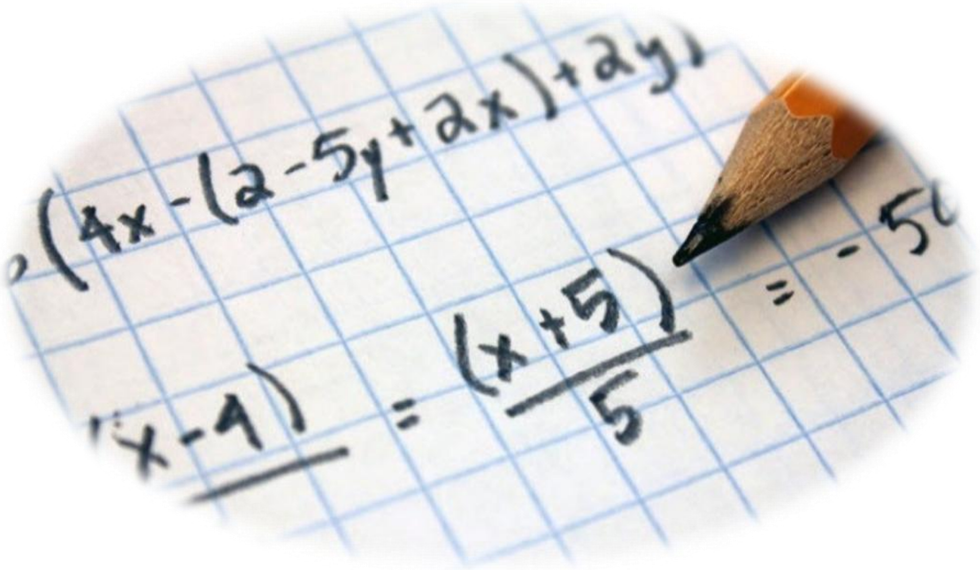
Lavalle A., Micheli E. y Boché S. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado en Matemática. *Premisa*, 5 (17), 23-31.

Lecoutre M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics,* 23 (1), 557 – 568.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. & Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. González & M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 268-276). Huesca, España: SEIEM.

9

Tareas para iniciar el estudio del Álgebra y valorar la comprensión en los estudiantes



Marcel David Pochulu y Maricel Alejandra Ferrero

9.1. Introducción

Reconocemos que es complejo el proceso de transición de la aritmética al álgebra que experimentan los estudiantes en la escuela secundaria. Además, despierta en los docentes numerosos interrogantes que son motivos de búsqueda de propuestas educativas que posibiliten una mejor apropiación de los objetos y/o conceptos básicos de esta área de la matemática. Entre ellos tenemos: ¿el estudiante realiza rápidamente el pasaje de una situación problema a la simbolización? ¿Qué se necesita para que esto ocurra? ¿Qué estrategias utiliza para lograr el pasaje de un registro de representación a otro? ¿Puede realizar rápidamente la generalización a partir de casos particulares? ¿Cuáles son los indicadores que podemos tomar como referencia para determinar el nivel de comprensión alcanzado? ¿Cómo advertimos que ha comprendido un determinado contenido? Esta lista de preguntas, seguramente inacabada, motivó la realización de este trabajo que tuvo como principal objetivo contar con algunas tareas que nos permitan transitar de la aritmética al álgebra, y valorar la comprensión que alcanzan los estudiantes de la escuela secundaria en algunos temas de esta área. Para ello, se llevó a cabo una selección de problemas, algunos de los cuales fueron extraídos de libros de texto para ese nivel y otros, elaborados para este fin.

Para determinar la idoneidad didáctica de las situaciones problemas seleccionadas utilizamos herramientas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) que proponen Godino (2000, 2003, 2013), Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007) y Godino, Batanero & Font (2007). Este enfoque confiere fundamental importancia a las nociones de *significados institucionales y personales*, y concibe el significado de un objeto matemático, entendido como todo aquello que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemática, en términos del *sistema de prácticas* ligadas a un tipo de problema.

El EOS concibe que el significado de un objeto matemático es el resultado del sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona, institución o comunidad de prácticas realiza para resolver cierto tipo de problemas en los que el objeto interviene. En este ámbito consideramos *práctica matemática* a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validarla y generalizarla a otros contextos y problemas.

La noción de sistema de prácticas (operativas y discursivas), constituidas por las prácticas significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución, asume una concepción pragmática–antropológica de la matemática, tanto desde el punto de vista institucional como personal. La actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático (Godino, Batanero & Font, 2007).

Si bien en la descripción de las actividades matemáticas suele hacerse alusión a diferentes tipos de objetos, para el EOS se consideran seis tipos de entidades u objetos primarios: situación-problema, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentaciones y lenguaje. En particular, en la resolución de un problema se pueden encontrar algunos o todos estos objetos mencionados.

Los seis objetos primarios (situaciones-problemas, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje) que están presentes en una práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones, las que pueden ser de tipo epistémica o cognitiva. Estas configuraciones se denominarán *epistémicas*, si son redes de objetos institucionales (extraídas de un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), o *cognitivas*, si representan redes de objetos personales (observadas en la actividad de los estudiantes). En la Figura 1 que se muestra a continuación, se presenta la articulación de los seis objetos primarios en una configuración epistémica/cognitiva.

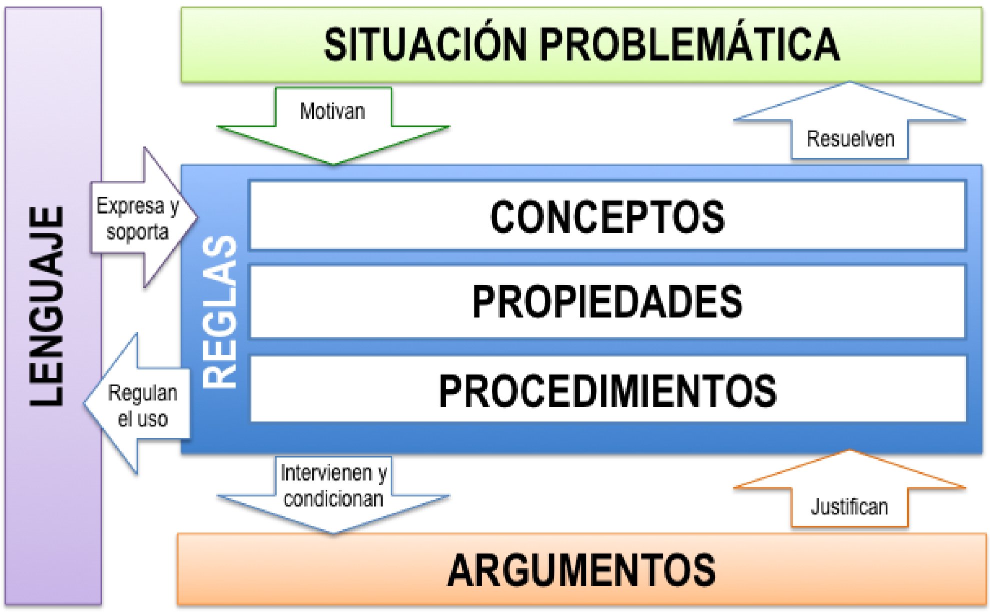


Figura 1: Configuración Epistémica/Cognitiva adaptada de D'Amore, Font y Godino (2007)

A su vez, los objetos primarios están relacionados entre sí por medio de una *función semiótica* caracterizada, según Godino, Batanero & Font (2007), como una correspondencia (ya sea relación de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado, representado) que establece un sujeto, persona o institución de acuerdo con cierto criterio. Dicha correspondencia se establece entre dos objetos, cuando uno de ellos se pone en lugar del otro o bien uno es usado por otro. Con la noción de *función semiótica* se evidencia el carácter netamente relacional de la actividad matemática y de los procesos que difunden el conocimiento matemático.

Una vez determinados los objetos primarios presentes en la resolución de cada situación problema es posible identificar algunos conflictos semióticos potenciales que aparecen. En el EOS, la idea de *conflicto semiótico* alude a cualquier disparidad o discordancia entre los significados que se atribuyen a una expresión por dos sujetos (persona o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto, los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales (Godino, Batanero & Font, 2007).

Por otra parte, involucramos en nuestro trabajo la noción de comprensión, la cual tiene múltiples acepciones y son numerosos los investigadores en Educación Matemática que la caracterizan. Entre ellos tenemos a Godino (2000 y 2003), Font (2001), Pochulu y Rodríguez (2012), Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011), y en este trabajo la entendemos del siguiente modo:

> Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra y extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural. (INFD, 2010, p. 122).

En consecuencia, si queremos valorar la comprensión que lograron los estudiantes sobre cierto objeto matemático, las tareas que se propongan tienen que estar acordes a este fin. Esto nos lleva a analizar si efectivamente permiten establecer una red relevante de relaciones entre conceptos, propiedades y procedimientos, las que se soportan a través de diferentes representaciones lingüísticas. A su vez, deberá asignársele un rol protagónico al quehacer matemático del estudiante, dando lugar a que argumente sobre lo realizado.

9.2. Tareas para iniciar la clase de Álgebra

Entendemos por tarea la acepción que brindan Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017), cuando expresan que está conformada por tres partes: una consigna, un contexto y el objetivo que se plantea el docente para esa consigna. A su vez, cada una de estas partes debe guardar coherencia con las demás (el contexto con el objetivo, el objetivo con la consigna y el contexto con la consigna).

Figura 2: Partes constitutivas de una tarea

La *consigna* es el enunciado dado al estudiante. El *contexto,* según Barreiro *et al* (2017, p. 51), nos ubica en

> El tipo de trabajo que vienen haciendo los alumnos, los conocimientos previos de los que disponen, el tipo de consignas que han venido realizando, el momento en que se plantearía esa consigna (por ejemplo, si se implementaría/llevaría a cabo antes o después de haber explicado un tema nuevo), la modalidad de trabajo que se propone para abordarla (individual, grupal, la realiza el docente, etc.) y, tal vez, una anticipación de lo que se trabajará luego).

Por último, el objetivo refiere a lo planteado por el docente en términos de lo que él quiere que su estudiante aprenda o logre a partir de su clase y con esa consigna.

Para nuestro trabajo, el contexto y los objetivos son los siguientes:

Contexto: Alumnos del segundo y tercer año de escuela secundaria que manejan operaciones con naturales y enteros (suma, resta, multiplicación y división, potenciación y radicación) y propiedades (asociativa, conmutativa, distributiva, elemento neutro), regla de tres simple directa y proporcionalidad directa. Están acostumbrados a trabajar en grupos y a argumentar sus respuestas. El docente tiene pensado comenzar a trabajar con fórmulas que expresan regularidades geométricas y aritméticas, posteriormente con problemas de divisibilidad (contenido que abordaron en años anteriores) que los lleve a procesos de simbolización para poder transitar hacia el trabajo algebraico, y finalmente, actividades que inducen a demostrar o validar en matemática. Les propone trabajar en grupo, redactar las respuestas en papel afiche, pegarlas en el pizarrón e integrantes de los grupos deberán defenderlas ante compañeros y docente.

Objetivos: que los alumnos

- Propongan formas de conteo a partir de reconocer regularidades o patrones
- Simbolicen adecuadamente expresiones dadas en lenguaje verbal
- Argumenten sobre la validez de distintas expresiones algebraicas

Para cada una de las consignas presentamos la resolución experta, lo cual conlleva a detectar las eventuales dificultades o conflictos semióticos potenciales que podrían surgir para los estudiantes y la anticipación de los posibles procedimientos para su resolución.

Hemos considerado valioso que una consigna pueda admitir diferentes posibilidades de exploración y argumentación, porque le permitiría al alumno tomar decisiones, organizar sus intentos o modos para abordar la resolución, recurrir a heurísticas o utilizar distintas habilidades generales matemáticas, reflexionar sobre sus intentos para sostenerlos o descartarlos y establecer una manera de explicar la respuesta.

Respecto de las posibilidades de exploración, siguiendo a Barreiro *et al* (2017), se entiende que este proceso se favorece si la consigna admite diferentes caminos de resolución y si no incluye los pasos a seguir (no está pautado para un mismo fin y no se le indica al estudiante de qué manera debe hacer la actividad).

En cuanto a la actividad matemática, se entiende como el desempeño, trabajo o quehacer que el estudiante realiza ante una tarea determinada. En este sentido, la actividad matemática será valiosa si el potencial matemático de la consigna es rico, el docente le asigna un rol activo al estudiante (es este último quien encara la resolución de la tarea) y el objetivo que se persigue es cognitivamente exigente.

Para cada una de las consignas nos interesan las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes, a fin de establecer el modo en que articulan los objetos primarios involucrados en la resolución (situación problema, conceptos o definiciones, propiedades, procedimientos o técnicas, argumentaciones y lenguaje). A su vez, realizamos entrevistas en profundidad y de tipo semiestructurado a los estudiantes para poder reinterpretar y complementar el análisis de lo que manifiesten en forma escrita u oral.

Para las instancias de resolución de problemas, la docente a cargo de la cátedra de matemática gestionó teniendo en cuenta algunos criterios que establecen Barreiro *et al* (2017):

- Evitar dar más información que la estrictamente puesta en juego en la pregunta/respuesta del estudiante,
- Intervenir desde la lógica que siguió el estudiante y no desde la que el docente tiene pensada la resolución experta del problema,
- Estimular en el estudiante el desarrollo de estrategias de autocontrol,

- Evitar realizar intervenciones solo cuando lo que el estudiante hizo está mal,
- Pedir explicaciones aun cuando la respuesta dada por el estudiante sea correcta.

Este modo de gestionar la clase tiene por propósito alentar los procesos de argumentación y que los estudiantes puedan conjeturar, demostrar y validar. A su vez, se busca que sea el estudiante quien llegue al conocimiento a través de sus propias conclusiones y no por medio de un conocimiento aprendido.

El primer grupo de problemas hace referencia a la búsqueda de patrones y regularidades, considerando que este puede ser un buen comienzo hacia la abstracción matemática necesaria para el desarrollo del pensamiento algebraico. Estas actividades, que se le presentan al alumno en lenguaje coloquial y gráfico, permiten visualizar patrones que posibilitan contar más fácilmente los elementos de una serie. Descubrir, por ejemplo, cuál es la cuenta que hay que hacer para calcular la cantidad de elementos que se utilizan en una secuencia o serie compuesta por figuras geométricas, y poder explicar verbalmente esta regla tratando de escribirla de la manera más acotada posible, sería el punto inicial para la introducción de las literales y así llegar a la escritura simbólica. En este sentido, entendemos que:

> El hecho de construir símbolos para expresar generalizaciones propias hace que estas constituyan una forma específica y precisa de escritura. La interpretación de símbolos en términos de series numéricas o icónicas permite que no se vean como simples objetos, sino como auténticas variables. Así, puede ir formándose el concepto de variable, central en el aprendizaje del álgebra. La adquisición del concepto de variable exige el dominio de procedimientos relacionados con la percepción y la expresión de lo general. (Grupo Azarquiel, 1999, p. 29)

Asumimos que descubrir patrones o regularidades, explicarlos, incorporar símbolos para registrarlos, llegar a la construcción de una fórmula y probar la validez de una o más expresiones algebraicas que surjan en la clase, son las instancias constitutivas fundamentales de un proceso necesario para transitar de la aritmética al álgebra. Sin embargo, sabemos que la mayoría de las veces termina siendo frustrante para los estudiantes y, en otros casos, acarrea una serie de errores conceptuales que impiden el progreso y el éxito en aprendizajes posteriores en este campo, si la gestión de la clase es endeble o el docente no tiene en cuenta el objetivo que se persigue con la misma.

La generalización es el corazón de la matemática, expresa Sessa (2005) y, por tal razón, propone esta vía para la entrada al álgebra. En particular, sugiere dos perspectivas de trabajo que involucran lo algebraico. Una de ellas es "la producción de fórmulas para contar colecciones" y la otra, "la formulación y validación de conjeturas sobre números y operaciones" (Sessa, 2005, p. 73).

Nuestro trabajo se centra en proponer el análisis y posterior reflexión sobre dos consignas, las que tienen por propósito la producción de fórmulas para contar. Forman parte de un grupo de problemas con similares características, los cuales llevamos al aula y tenemos registro del quehacer matemático de los estudiantes. Este grupo de consignas se van complejizando de manera progresiva, apuntando principalmente hacia la escritura de fórmulas, procesos de simbolización y significación de variables, la lectura y validación de expresiones y la noción de equivalencia entre ellas. En una fase posterior, y después de mucha actividad matemática con los estudiantes y de haber pasado por formulación y validación de conjeturas con números y operaciones, iniciamos con el trabajo de problemas que se modelizan con ecuaciones.

9.3. Las consignas de las tareas

Consideremos la consigna 1, enmarcada en el contexto y objetivos que describimos en la sección anterior. A su vez, su enunciado está en un contexto extramatemático, el cual comanda la construcción de equivalencia entre expresiones algebraicas.

La decisión de preguntar por la figura número 30 tiene su intencionalidad. Es un número relativamente "grande" como para que el estudiante se vea tentado a realizar un dibujo y, al mismo tiempo, quienes no logran comprender el patrón que está involucrado, tienen la posibilidad de realizar el esquema. Notemos que la consigna no está pautada para un mismo fin, pues es habitual que ante problemas de esta naturaleza se les pida a los alumnos completar tablas para valores de figuras (5, 6, 7, etc.) y posteriormente, se les solicita una fórmula. En nuestro caso, pretendemos que sea el estudiante el que inicie el proceso de exploración y no se induzca el camino a seguir. Eventualmente el profesor se reserva las preguntas que podrían estar orientando al estudiante a generar un plan de acción, aunque sin decirle cómo debe hacerlo.

Consigna 1

Analicen las figuras que armaron con fósforos los alumnos de otro curso:

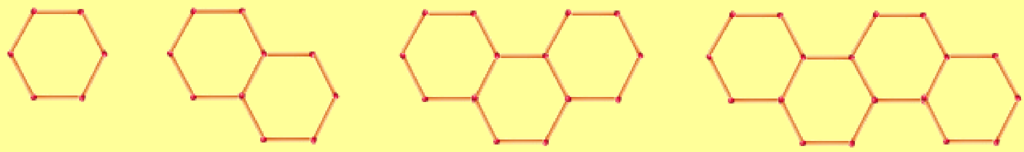


Figura 1 ***Figura 2*** ***Figura 3*** ***Figura 4***

a. ¿Cuántos fósforos necesitarán para hacer la figura número 30? En el afiche entregado a cada grupo, deberán escribir cuáles fueron los pasos realizados para poder encontrar la cantidad de fósforos que tendría la figura 30. Luego, deberán elegir un representante del grupo, que nos contará al resto del curso cómo llegaron a la respuesta.

b. ¿Es posible realizar un cálculo que permita conocer cuántos fósforos se necesitan para cualquier número de figura? En caso afirmativo, decidir si es único y fundamentar la respuesta. En caso contrario, explicar.

Veamos estrategias de conteo surgidas de la resolución de la actividad, tanto acertadas como erróneas.

Estrategia 1: Se advierte que la cantidad de hexágonos es la misma que el número de figura. Por esta razón, una forma rápida de efectuar el cálculo será multiplicar el número de figura por 6. En consecuencia, la figura 30 tendrá 180 fósforos. Obviamente que es errónea la respuesta, pero se advirtió un patrón y le corresponderá al docente gestionar la clase para que sea el estudiante el que advierta que su estrategia no es óptima. Inicialmente no pretendemos que los estudiantes realicen una simbolización apropiada o encuentren una fórmula.

En instancias posteriores se podrá debatir sobre la conveniencia de expresar en forma más sintética lo que decimos verbalmente. Así, por ejemplo, podemos quedarnos con expresiones del tipo: "La cantidad de fósforos es igual al número de figura multiplicado por 6". Claro está que si con F representamos a la cantidad de fósforos y con n al número de figura, la expresión involucrada es:

$$F = 6n.$$

Insistimos en que no debe apresurarse el proceso de simbolización, sino más bien que los estudiantes adviertan patrones, y puedan defender sus ideas en el grupo.

Estrategia 2: Se advierte que la cantidad de hexágonos es la misma que el número de figura y que comparten un fósforo entre dos hexágonos. Por esta razón, una forma rápida de efectuar el cálculo será multiplicar el número de figura por 6 y restarle el número anterior al de la figura. En consecuencia, la figura 30 tendrá 151 fósforos, y la expresión simbólica asociada (siguiendo el esquema anterior) será:

$$F = 6n - (n - 1)$$

Estrategia 3: Se advierte que la cantidad de hexágonos es la misma que el número de figura y que comparten un fósforo entre dos hexágonos, aunque se piensa que la cantidad de fósforos compartidos es equivalente al número de figura. Si bien el método de cálculo es erróneo, no podemos desestimar los patrones que advirtieron los estudiantes. En este caso, darán como respuesta que la figura 30 tiene 150 fósforos, y la expresión simbólica asociada es:

$$F = 6n - n$$

Estrategia 4: Se sabe que la figura 1 tiene 6 fósforos y que a las siguientes se agregan grupos de 5 fósforos. Por ejemplo, la figura 2 se logra con 6 fósforos iniciales a los que se agregan 5 más. La figura 3 tiene los 6 fósforos iniciales y se agregan 2 veces 5 fósforos. Este esquema de conteo nos lleva a decir que la figura 30 tiene 151 fósforos y la expresión simbólica asociada es:

$$F = 6 + 5(n - 1)$$

Estrategia 5: Se advierte que los hexágonos comparten un fósforo. Por esta razón, el número total de fósforos se puede calcular multiplicando por 5 al número de figura. Si bien el razonamiento puede juzgarse en parte como erróneo, no podemos desestimar los patrones y regularidades que advirtieron los estudiantes, emergidos en una puesta en común o cuando les pedimos que argumenten. Bajo esta estrategia dirán que la cantidad total de fósforos de la figura 30 es 150 y la expresión simbólica asociada es:

$$F = 5n$$

Estrategia 6: Se advierte que los hexágonos comparten un fósforo. Por esta razón, el número total de fósforos se puede calcular multiplicando por 5 al número de figura y sumándole 1 para cerrar el esquema. Así resulta que la figura 30 tiene 151 fósforos y la expresión simbólica asociada es:

$$F = 5n + 1$$

Estrategia 7: Se calculan la cantidad de fósforos para una cierta cantidad de figuras y se analiza el patrón numérico. Por ejemplo, la tabla 1 relaciona el número de figura con la cantidad de fósforos para las primeras 10 figuras. Puede advertirse que, para números impares de la figura, la cantidad de fósforos es un número que termina en 6, mientras que si el número de figura es par, la cantidad de fósforos termina en un 1. A su vez, podemos desglosar el número que determina la cantidad de fósforos y advertimos que para una figura de orden par (30 por ejemplo), termina en 1, pero los dígitos que le anteceden son la mitad del número de figura (15 en nuestro caso). De esta manera queda conformado el 151, que es la cantidad de fósforos para la figura 30. Un patrón similar puede determinarse para las figuras de orden impar.

Tabla 1: Relación entre número de figura y fósforos

Número de figura	Cantidad de fósforos
1	6
2	11
3	16
4	21
5	26
6	31
7	36
8	41
9	46
10	51

El lector podrá pensar que es imposible que un estudiante encuentre esta estrategia. Sin embargo, nuestra experiencia nos muestra que es habitual en grupos acostumbrados a trabajar con problemas no estructurados y con una gestión de la clase que promueva la discusión de diferentes estrategias. Como ejemplo dejamos una imagen (Figura 3) que corresponde a un grupo de estudiantes de segundo año de una escuela secundaria de la ciudad de Río Grande, Tierra del Fuego.

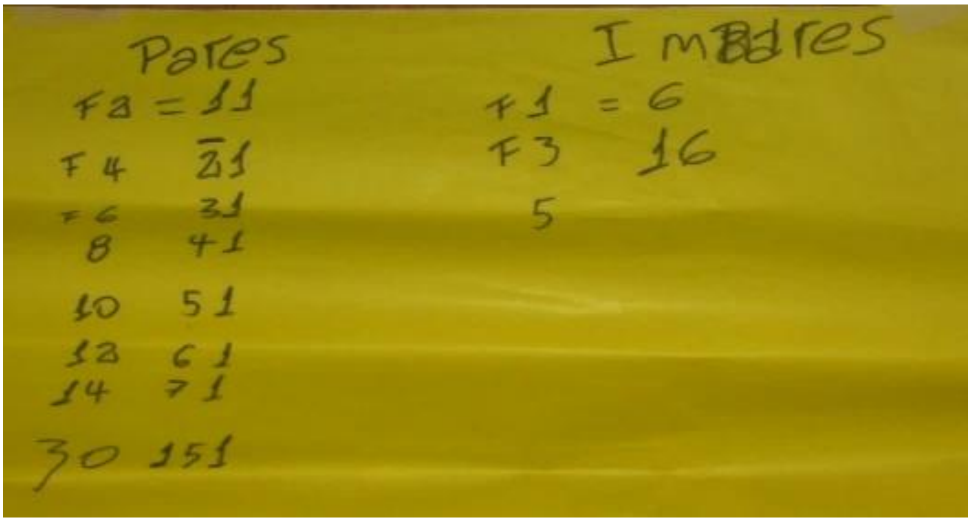


Figura 3: Resolución de alumnos para el Problema 1

Estrategia 8: Determinar la cantidad de fósforos que tiene una figura cuyo número sea divisor de la que se busca. Por ejemplo, si buscamos la cantidad de fósforos de la figura 30, se calcula la de la figura 3 (pues 30 es igual a 3 multiplicado por 10) o de la 5 (30 es igual a la multiplicación entre el 5 y el 6).

Posteriormente se multiplica a esta cantidad de fósforos por el otro factor en el que se descompone al número de figura. Así expresado el razonamiento es incompleto, pues hay que descontar los fósforos que comparten la yuxtaposición de estas figuras.

A su vez, la estrategia demanda descomponer en factores al número de figura (si es que no es primo) y tiene mucha actividad matemática de por medio para discutir y debatir. Seguramente el lector juzgará que es poco probable que esta estrategia aparezca, lo cual no es cierto. Dejamos como ejemplo en la Figura 4 una resolución realizada bajo este esquema (aunque con errores).

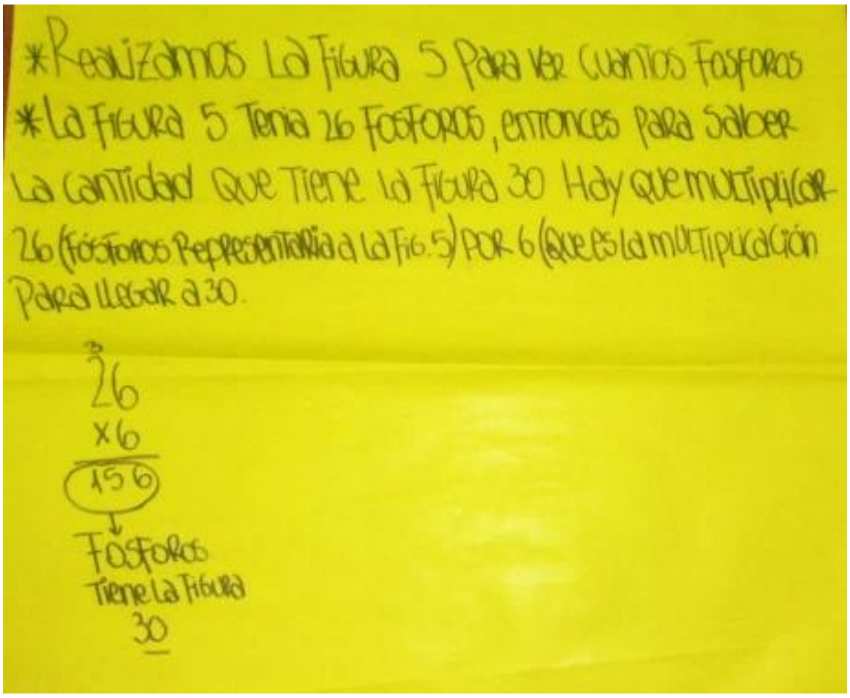


Figura 4: Otra estrategia de resolución de alumnos para el Problema 1

Solo hemos detallado algunas de las tantas estrategias que ponen en juego los estudiantes. El momento de la puesta en común es la oportunidad del docente de realizar las preguntas adecuadas que lleven a reflexionar a los alumnos. En estos procesos de argumentación se articulan propiedades, procedimientos, conceptos y elementos lingüísticos que permiten valorar la comprensión lograda sobre temas de Álgebra Básica. Por ejemplo, resulta valioso que los estudiantes discutan si las diferentes expresiones o modos en que cuentan los fósforos son equivalentes. Hay que pensar que los estudiantes no han transitado por álgebra y, por tanto, no es una estrategia útil aplicar la propiedad distributiva u operar con expresiones algebraicas, pues no es un contenido que disponen, sino que lo están construyendo.

Las expresiones se pueden validar desde el punto de vista numérico, pero ¿con cuántos valores será suficiente "probar" para determinar que dos expresiones son equivalentes? Si bien los alumnos aún no cuentan con herramientas para dar una respuesta acabada a este interrogante, eso no impide instaurar la duda e incertidumbre. Sabemos que por tratarse de expresiones lineales será suficiente probar con dos valores de figura y si la cantidad de fósforos coincide, nos dará la pauta de que estamos contando lo mismo, solo con diferentes fórmulas.

Retomemos ahora la estrategia 7, que puede parecer extraña que surja en los estudiantes, pero tiene mucha riqueza matemática. ¿Por qué aparece esta regularidad? En este punto es interesante aprender a leer la información que nos arrojan los símbolos. Tomemos una de las expresiones que relaciona el número de figura con la cantidad de fósforos:

$$F = 5n + 1$$

¿Qué información nos brinda? Para ello es necesario analizar cada sumando de la expresión. Por ejemplo, $5n$ denota a un múltiplo de 5, pues n es un número natural. Un múltiplo de cinco termina en 0 o en 5. Si a un múltiplo de 5 le sumamos 1, obtenemos su siguiente y en consecuencia, terminará en 1 o en 6, tal como lo observan muchos alumnos al analizar el patrón numérico de la estrategia 7.

Notemos que existen otras expresiones de las cuales se puede desprender este análisis, por ejemplo:

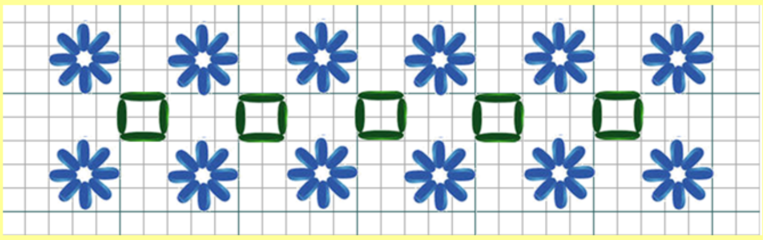
$$F = 6 + 5(n - 1)$$

Estos análisis y debates con los alumnos permitirán valorar la comprensión que ellos alcanzaron en los contenidos abordados.

Pasemos a otra consigna, la cual conserva el mismo propósito que la consigna 1.

Consigna 2

Lucía está aprendiendo a bordar en punto cruz. Decidió hacer una guarda en un camino de mesa con el siguiente diseño:



a. ¿Es posible que haya culminado la guarda y le quedaron exactamente 86 flores? ¿y 75 flores? Expliquen cómo lo pensaron.

b. ¿Es posible realizar un cálculo que permita conocer cuántas flores y cuántos cuadrados quedaría en una guarda terminada? Explicar la respuesta.

A diferencia de la consigna anterior, aquí desconocemos el largo de la guarda. Solo disponemos como información una representación gráfica, la que nos comunica que el diseño final debiera comenzar y terminar con flores.

Pasemos a describir algunas estrategias de conteo que realizan los estudiantes.

Estrategia 1: Una opción será continuar dibujando la guarda. Preguntar por una cantidad suficientemente grande de flores (75 u 86) es una variable didáctica que juega un papel importante, en tanto se hace difícil y engorroso dibujar una guarda tan extensa, por lo que resulta necesario encontrar otra manera "más económica" de contar la cantidad de flores, o advertir una regularidad (sencilla, por cierto, en este caso).

Realizar el dibujo soluciona parcialmente el problema, pues los alumnos terminan advirtiendo que la cantidad de flores debe ser un número par. La dificultad se encontrará cuando tengan que encontrar un patrón que relacione la cantidad de flores con la de cuadrados. Puede resultar fácil visualizar que, por cada cuadrado que se agrega a la guarda, se bordan dos flores (partiendo de dos flores iniciales).

Los errores frecuentes que pueden surgir devienen de pensar que por cada cuadrado se agregan dos flores, y olvidar las dos iniciales de la guarda; o bien, multiplicar la cantidad de cuadrados por cuatro, ya que hay una flor por cada vértice del cuadrado, sin tener en cuenta las que se comparten.

En este punto, es importante buscar una forma de contar las flores sin necesidad de dibujar la guarda. Obviamente, las "reglas" que surjan en los diferentes grupos de alumnos serán expresadas de manera verbal en primera instancia, pues no se pretende apresurar el proceso de simbolización.

Estrategia 2: Hay cuatro flores por cada cuadrado, por lo tanto, multiplicamos por 4 a la cantidad de cuadrados. Ahora tendremos que descontar la cantidad de flores compartidas, las cuales resultan ser el doble de la cantidad de cuadrados disminuida en una unidad. Si con C denotamos la cantidad de cuadrados y con F la cantidad de flores, una expresión que vincula ambas variables resulta ser:

$$F = 4C - 2(C - 1)$$

Notemos que para esta estrategia tendremos como expresiones de conteo erróneas las siguientes: $F = 4C$ y $F = 4C - 2C$.

Estrategia 3: Multiplicamos por 2 a la cantidad de cuadrados y agregamos 2 unidades iniciales, lo que nos daría la cantidad de flores totales. En forma simbólica, tendremos:

$$F = 2C + 2$$

Esta estrategia es fácilmente determinada por los estudiantes y un ejemplo de ella lo tenemos en la Figura 5, donde encontramos parte de la resolución del problema realizada por un estudiante.

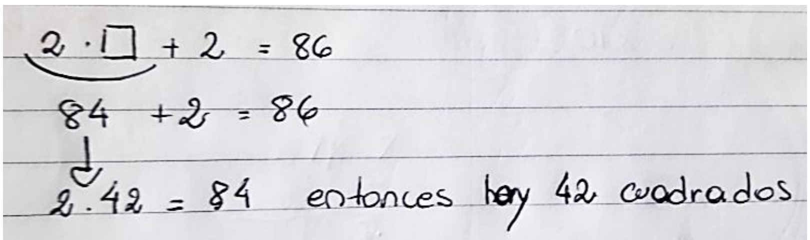


Figura 5: Resolución parcial del problema por parte de un estudiante

Hay que advertir que es más fácil encontrar la cantidad de flores conociendo la de los cuadrados, y es una decisión relevante que deben tomar los alumnos en el momento de probar alguna relación.

En la puesta en común será necesario que argumenten sobre el tipo de número que están encontrando y las justificaciones del caso. Por ejemplo, ¿qué información nos brinda la expresión $F = 2C + 2$?

Como se multiplica por 2 a la cantidad de cuadrados, esto resulta ser un múltiplo de dos y, por lo tanto, un número par. A su vez, sumarle 2 a un número par da por resultado otro número par. Esto nos lleva a concluir que la cantidad de flores será siempre un número par. ¿Cuál es el menor valor que tendremos en flores? La respuesta es 4 y no necesariamente es obvia para los estudiantes, si se quedan analizando una expresión y prescinden de la representación gráfica.

Esto que acabamos de expresar guarda relación con lo que Arcavi (1994) llama capacidad para manipular y leer a través de expresiones simbólicas. Expresa que es necesario que el estudiante adopte una visión global de las expresiones simbólicas, puesto que agregan niveles de conexión y razonabilidad a los resultados y, además, lo aparta de las manipulaciones automáticas o algebraicas.

9.4. Reflexiones finales

Apreciar las estrategias que desarrollan los alumnos, los conocimientos previos que ponen en juego, las explicaciones y argumentos que brindan sobre la resolución del problema (en la puesta en común o entre pares), el lenguaje utilizado para fundamentar sus respuestas, el modo en que relacionan conceptos, propiedades o proposiciones, son insumos inevitables para valorar la comprensión alcanzada en estas tareas. No obstante, para valorar la comprensión, será indispensable la intervención del docente y una adecuada gestión de la clase, permitiendo que los estudiantes sean los que argumenten y defiendan ideas y no el profesor el que muestra el modo “correcto” en que debe pensarse el problema.

En niveles más bajos de comprensión, será habitual que las argumentaciones aludan a ejemplos particulares, otorgando valores particulares a las variables y no puedan realizar una lectura de los símbolos o expresiones trabajadas en la clase por otros estudiantes. Por otra parte, los estudiantes que alcanzan un nivel de comprensión medio, si bien recurren a ejemplos concretos, en primera instancia, lograr desarrollar procesos de simbolización e incluso, realizar generalizaciones (muchas veces de manera incompleta), aunque dotando de sentido a cada término de una expresión. Por ejemplo, en la Figura 6 podemos advertir un esbozo de generalización, donde se le asigna significado a un símbolo.

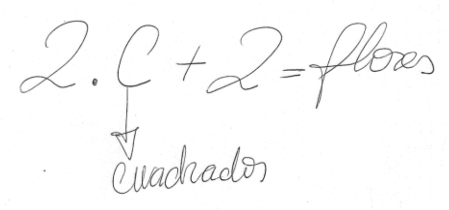


Figura 6: Proceso de simbolización de un estudiante

Un nivel de comprensión más elevado se advierte en estudiantes que pueden prescindir rápidamente de casos particulares para realizar validaciones y/o demostraciones, recurren intuitivamente a la simbolización definiendo variables, hacen uso de conceptos, propiedades y procedimientos en las argumentaciones y pueden generalizar patrones y comportamientos.

En la Figura 7 podemos notar el trabajo realizado por un estudiante que evidenció buena comprensión sobre los contenidos involucrados en las tareas que presentamos en la sección anterior.

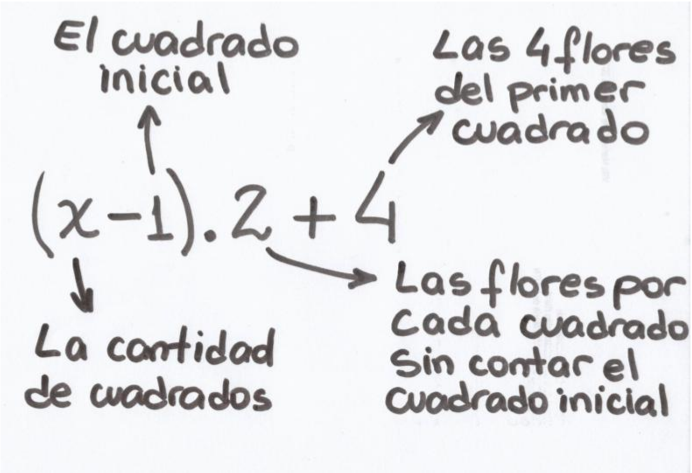


Figura 7: Proceso de simbolización y significación de un estudiante

En los dos ejemplos anteriores (Figuras 6 y 7) se advierte la capacidad de seleccionar una posible representación simbólica por parte de los estudiantes. A ellos les corresponde, como lo expresa Arcavi (1994), reconocer la propia insatisfacción con esa selección, y prestarle atención e ingeniarse para buscar una mejor. Arcavi también sugiere que se debe desarrollar, en los estudiantes, la conciencia de que es necesario revisar los significados y sentido de los símbolos durante la aplicación de un procedimiento, como así también, que logren comparar esos significados con las intuiciones acerca de los resultados esperados, el propósito de su uso y el poder del mismo. Para estos procesos, inevitablemente se requiere de la paciencia del profesor para aceptar comprensiones parciales de los estudiantes.

9.5. Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14(3)*, 24-35.

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática*. Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradìgma,* 28(2), 49-77.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competencia. *Biaix 19*, 33-36.

Godino, J. (2000). Significado y comprensión en matemática. UNO (25), 77-78.

Godino, J: (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la UG.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM,* 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, XXVII*(2), 221-252.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8 (11), 111-132.

Grupo Azarquiel. (1999). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Madrid, España: Síntesis.

INFD (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Instituto Nacional de Formación Docente y Secretaria de Políticas Universitarias.

Pochulu, M., y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS y EDUVIM.

Rodríguez, M., Pochulu, M. y Ceccarini, A. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educação Matemática Pesquisa, 13(3),* 461-487.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

10

Marco epistémico y didáctico de referencia del área de figuras compuestas

Mayra Alejandra Jiménez Consuegra y Marcel David Pochulu

10.1. Introducción

La geometría es una de las ramas de la matemática a la que se dedica un espacio limitado en las clases y en los libros de textos. Particularmente, en INFD (2010, p. 127) se expresa que:

> El prestigio adquirido históricamente en la disciplina se ha ido desplazando hacia otras ramas que proporcionan nuevos registros de representación y que habilitan un trabajo que puede descontextualizarse de las figuras, una vez modelizadas las relaciones geométricas utilizando ese nuevo sistema. Actualmente, la formación matemática hereda los resabios de este corrimiento, la geometría sintética -sin sistemas de referencias ni coordenadas- ha perdido lugar en las aulas desplazándose hacia formas más algebraicas.

Oliver, Rocerau, Valdéz, Vilanova, Medina, Astíz y Laviada (2003) reportan que normalmente los libros de texto suelen disponer solo tres o cuatro unidades para geometría, con diferencias significativas en la cantidad y calidad de las actividades que cada uno dedica a los temas de esta rama de la matemática. Este mismo estudio reveló que se proponen pocas actividades geométricas y que no inducen a la formación de los conceptos, sino que éstos simplemente se enuncian (se comunican) y los ejemplos son escasos. Esto resulta preocupante, pues asumimos que la geometría debe ser enseñada en las escuelas en tanto se encuentra en nuestro entorno inmediato y es la que modela el espacio que percibimos. En este sentido, García y López (2008) expresan que la geometría ofrece a quien la aprende una oportunidad para emprender un viaje hacia formas superiores de pensamiento, promoviendo el desarrollo de la percepción del espacio, la capacidad de visualización y abstracción.

Dentro de la geometría, nuestro interés está centrado sobre los contenidos que guardan relación con el cálculo de áreas de figuras compuestas, puesto que es un objeto matemático que va más allá de realizar cálculos aritméticos y acarrea dificultades durante su enseñanza. Una de las dificultades más evidentes es el uso inadecuado de los términos área y superficie, aunque están íntimamente relacionados, hacen referencia a cosas distintas (Godino, Batanero y Roa, 2002). Además, la enseñanza de medidas de superficies parece estar en relajación, marcada por una unidad de medida y limitándose al cálculo directo del área usando simplemente las fórmulas (Castro, Flores y Segovia, 1997). Esto significa que usualmente se enseña al estudiante a calcular áreas, pero no a explicar, argumentar y entender las implicaciones que tiene la relación que se establece entre las dimensiones de una figura cuando se realiza este cálculo.

Por otro lado, el cálculo de áreas de figuras compuestas permite trabajar con la caracterización de las superficies de los objetos y sus formas de comparación. La actividad de medir superficies conlleva al estudiante a fijar una unidad de referencia, comparar la cantidad medida y la unidad, expresarla por medio de un número y atender al significado de este número (Castro, Flores y Segovia, 1997). En consecuencia, es un objeto matemático que también posibilita el planteamiento de tareas que promuevan la exploración y la argumentación de los estudiantes, si se suministran tareas apropiadas y se acompaña con una buena gestión de la clase.

Teniendo en cuenta este marco contextual, presentamos un marco epistémico y didáctico de referencia del concepto de área de figuras compuestas, e indicadores de idoneidad epistémica para valorar las tareas de cálculo de área de figuras compuestas. Para los indicadores de idoneidad, empleamos herramientas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) de Godino (2013).

Finalmente, proponemos algunas situaciones problemáticas referidas al tema que tienen una alta actividad matemática y resultan idóneas para ser consideradas en la enseñanza del cálculo de área de figuras compuestas. En cuanto a la actividad matemática, se entiende como el desempeño, trabajo o quehacer que el estudiante realiza ante una tarea determinada. En este sentido, la actividad matemática será valiosa si el potencial matemático de la consigna es rico, el docente le asigna un rol activo al estudiante (es este último quien encara la resolución de la tarea) y el objetivo que se persigue es cognitivamente exigente (Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez, 2017).

10.2. Marco epistémico del área de figuras compuestas

En el análisis didáctico sobre el concepto de área realizado por Corberán (1996), se muestra que muchos matemáticos abordaron problemas que implicaban calcular áreas sin haber precisado este concepto. Daban por supuesto que toda superficie limitada tiene un área. Un ejemplo de ello es el famoso problema de la cuadratura del círculo que propusieron los matemáticos griegos y que, posteriormente, fue solucionado por Newton y Leibniz, a finales del siglo XVII.

Esta idea de área, como medida que proporciona el tamaño de la región encerrada en una figura geométrica, se remonta a muchos años atrás. En el antiguo Egipto, la crecida anual de río Nilo inundando los campos motivó la necesidad de calcular el área de cada parcela agrícola para restablecer sus límites. La situación impulsó a los egipcios a inventar la geometría, según Herodoto de Halicarnaso.

Los egipcios son conocidos en la actualidad por resolver problemas geométricos tales como el área del triángulo isósceles, el área del trapecio isósceles y el área del círculo. Asimismo, los papiros encontrados dan muestra de que conocían algunos casos particulares de la propiedad de los triángulos rectángulos, que más tarde inmortalizó a Pitágoras (Baldor, 2004).

Fue el griego Antifón quien propuso el método de cálculo de área de un polígono como la suma de las áreas de los triángulos, hacia el año 430 a. C. No obstante, hallar el área de una figura curva aún seguía generando mayor dificultad. También aparece el método de agotamiento, que consistió en inscribir y circunscribir polígonos en la figura geométrica, aumentando el número de lados de ellos hasta hallar una aproximación del área buscada. El llamado método de exhaución de Eudoxo permitió un tratamiento riguroso de los cómputos de áreas y volúmenes, entre ellos, obtener una aproximación para calcular el área de un círculo (González, 2004; Struik, 1998).

El matemático griego Herón de Alejandría combinó la matemática griega con la oriental haciendo aportaciones geométricas, de cómputo y mecanismos. En sus escritos se puede evidenciar la “fórmula de Herón”, que permite calcular el área del triángulo en forma puramente geométrica, conociendo la medida de sus lados (Struik, 1998). En símbolos esta fórmula expresa:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde a, b y c son las medidas de los lados del triángulo y s el semiperímetro.

Ahora bien, Flores (2002, p. 9) proporciona una definición formal acerca del cálculo de área:

> Medir la superficie de un polígono $\boldsymbol{p}$ es asignar un número a la cantidad de superficie de ese polígono. Para ello se fija una cantidad de superficie $[u] = U$ de M, representada por un polígono (que suele tomarse cuadrado), a la que se llama unidad, y se busca el número que permite obtener $\boldsymbol{p}$ a partir de U (es decir, el número m tal que $\boldsymbol{p} = m \cdot U$). A este número m se le llama *área de* $\boldsymbol{p}$ *en unidad* U.

Además, agrega que la cantidad de superficie de un polígono es única, e igual a la de cualquier otro polígono obtenido por descomposición y recomposición. Sin embargo, el área de este polígono es un número que está ligado a la unidad de medida establecida. No obstante, el concepto de área de figuras compuestas se aborda en algunos textos clásicos de geometría (Rich & Thomas, 2009; Baldor, 2004; Wentworth y Smith, 2000, entre otros) de forma explícita y en otros implícitamente al trabajar el concepto general de área.

Rich & Thomas (2009) definen el área de una unidad cuadrada como la superficie encerrada en un cuadrado cuyo lado es 1 unidad, similar a la definición aportada por Flores (2002). Por tanto, el área de una superficie cerrada, tal como la de un polígono, es el número de unidades cuadradas contenidas en su superficie. A partir de esta definición de área, se establecen fórmulas para el cálculo de figuras poligonales (rectángulos, triángulos, trapezoides, etc.), áreas de círculos y sectores circulares. Posteriormente, el área de figuras combinadas o compuestas puede calcularse mediante la determinación de las áreas individuales, seguida de la suma o la resta de ellas, según resulte conveniente.

En la Figura 1 se muestra el tipo de tareas que se proponen en el texto de Rich & Thomas (2009) para abordar este concepto.

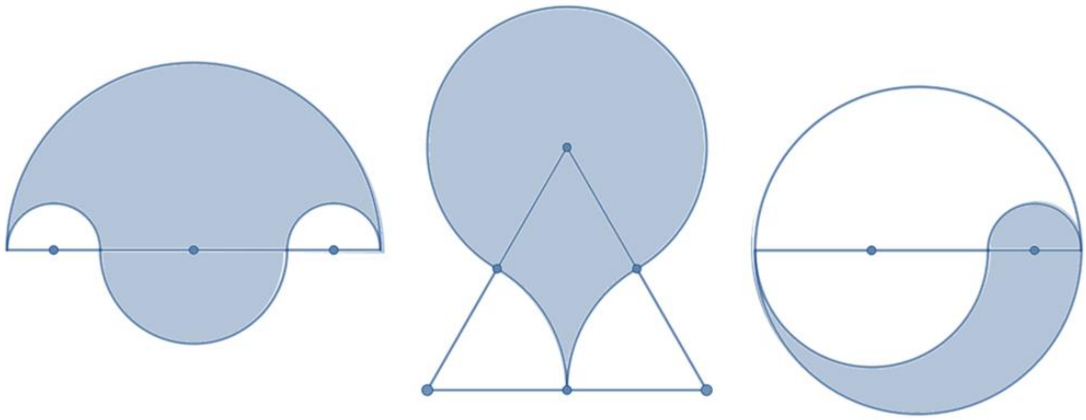


Figura 1: Tarea para el cálculo de área de figuras compuestas en Rich & Thomas (2009, p. 194)

Para el cálculo del área sombreada hay que tener en cuenta que es una figura compuesta por círculos, semicírculos o sectores circulares, y se ponen en juego el concepto de área de un círculo y los procedimientos de cálculo asociados a él.

Baldor (2004) realiza una distinción entre los términos superficie y área. Con superficie se refiere a la porción de un plano que ocupa una figura, la cual puede ser cuadrada, circular o de otra forma, mientras que con área se designa a la medida de una superficie. Establece que para determinar la medida de una superficie se toma como unidad un cuadrado que tenga por lado la unidad de longitud. Además, agrega que en la práctica el cálculo del área de una figura se efectúa indirectamente, es decir, midiendo la longitud de algunos de los elementos de la figura y realizando ciertas operaciones con dichas medidas.

Sin embargo, el área de figuras compuestas aparece de manera implícita en algunas tareas del banco de ejercicios complementarios propuestos en este texto (ver Figura 2). Asimismo, cuando se aborda el área de poliedros como prismas y pirámides, sugiere las sumas de las áreas que conforman las caras laterales para el cálculo de las áreas totales.

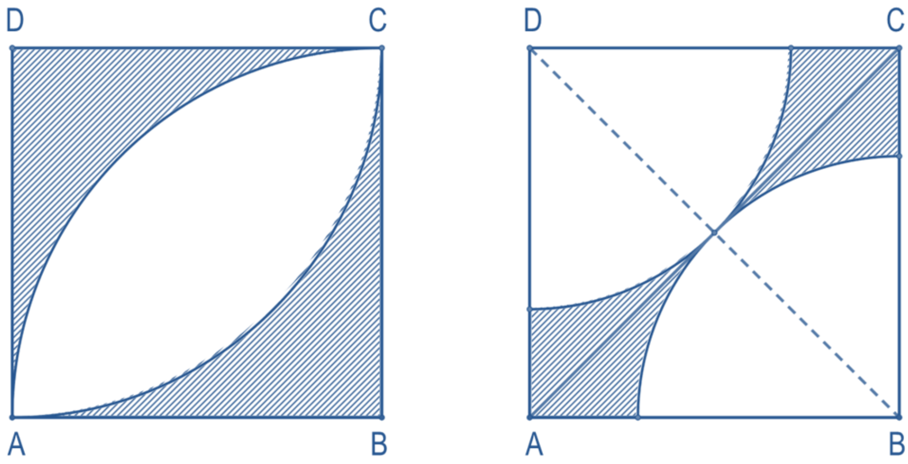


Figura 2: Tarea para el cálculo de área de figuras compuestas en Baldor (2004, p. 231)

Wentworth y Smith (2000) definen el área de una superficie como la medida de esa superficie en unidades superficiales, siendo esta última la superficie tomada como unidad para medir la de otras. Comúnmente, la unidad superficial es la de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad de longitud. Estos autores mencionan que el área de un polígono cualquiera se puede determinar descomponiéndolo en triángulos, sea por diagonales o por rectas trazadas a los vértices por un punto interior, y calculándolas.

Además, Wentworth y Smith (2000) afirman que, en agrimensura, se emplea a menudo el método que conlleva a trazar una de las diagonales mayores del polígono y las de los vertices restantes se trazan perpendiculares a ella. El polígono queda dividido en triágulos y trapecios, de manera que es posible calcular el área total de la figura compuesta.

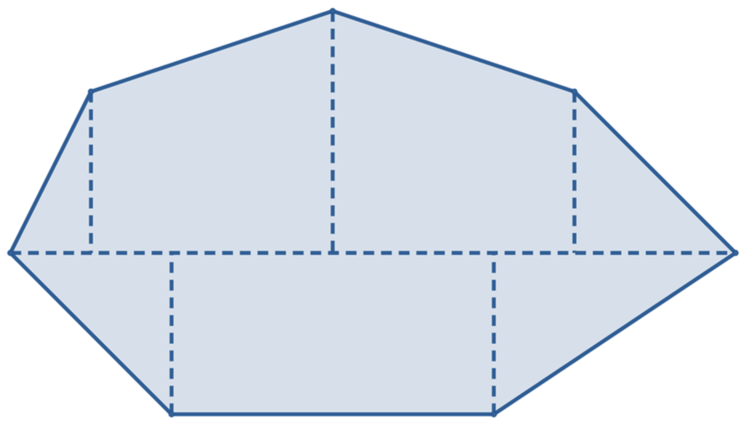


Figura 3: Ejemplo de descomposición de polígonos en Wentworth y Smith (2000, p. 199)

10.3. Marco didáctico del área de figuras compuestas

La enseñanza del área es considerada uno de los conceptos que juega un papel importante en la construcción de otros relevantes, como el de fracciones, integración, porcentajes, volumen, etc. Asimismo, contribuye al desarrollo de destrezas y habilidades matemáticas como la resolución de problemas, razonamientos, la argumentación, visualización, etc. Seguramente este es un motivo, entre otros, para que sea incorporada en los diseños curriculares, presentando orientaciones específicas para su tratamiento y considerándola como una de las magnitudes a las que mayor atención se le presta en los primeros grados de la educación básica (Marmolejo y González-Astudillo, 2015).

En el trabajo realizado por Corberan (1996), se pone en manifiesto que el concepto de área se ha abordado desde cuatro perspectivas (manifestaciones del área como las llama el autor):

- *El área como cantidad de plano ocupado por la superficie:* es la manifestación del área como cantidad de plano ocupado por la superficie, es la primera manifestación con la que los alumnos deben estar familiarizados. Por lo general, esta se trabaja realizando tareas de comparación de áreas de superficies, mediante el uso de procedimientos de naturaleza geométrica, donde el número está ausente de cualquier razonamiento.
- *El área como magnitud autónoma:* en esta manifestación se entiende el área disociada de la forma de la superficie y del número que la mide. Esto permite disociar el área del perímetro, puesto que la confusión entre estos dos términos es una de las más habituales y más arraigada entre los estudiantes, y les lleva a cometer frecuentes errores. Esta manifestación se trabaja realizando tareas de comparación de áreas de superficies, de modo que se observe que superficies de forma diferente pueden tener igual área, mediante el uso tanto de procedimientos de naturaleza geométrica como de naturaleza numérica. La disociación del área del número que la mide es clave en la comprensión del papel que juega la unidad de medida y, en consecuencia, en la comprensión del proceso de medida. Es apropiado trabajar con tareas de medida del área de una misma superficie, con el uso de diferentes unidades de medida.
- *El área como número de unidades que recubren la superficie:* para que el estudiante entienda esta manifestación es necesario que comprenda el papel que juega la unidad de medida en el cálculo de áreas. Trabajar la manifestación del área ayudará a los estudiantes a enfrentarse significativamente al estudio del área como resultante del producto entre magnitudes lineales. Por tanto, se debe hacer realizando tareas de medición basadas en la comparación de las áreas de dos superficies: una, la superficie cuya área se desea medir y la otra, la considerada como unidad, utilizando procedimientos de carácter numérico con uso de una unidad de medida bidimensional. De este modo, la medida del área vendrá dada por el número procedente de un recuento o conteo del número de unidades o fracción de ésta que recubren exactamente la superficie.
- *El área como producto de dos dimensiones lineales:* hay que resaltar que a pesar de ser esta una de las manifestaciones del área más enseñada a los alumnos, paradójicamente, es la que posee las más altas cotas de incomprensión. Debemos ser conscientes del nivel de abstracción y de formalización que requiere la medición de un área mediante cálculos a partir de las dimensiones lineales, y de ahí la dificultad de comprensión por parte de los alumnos de las fórmulas para el cálculo del área de algunas superficies. Por lo cual, se debe abordar esta manifestación realizando tareas de cálculo de áreas de superficies poligonales, que puedan ser descompuestas en rectángulos y/o triángulos, utilizando para ello la fórmula para el cálculo del área de estos polígonos.

Estas manifestaciones señaladas por Corberan (1996) hacen alusión a la forma en la que regularmente se enseña el concepto de área, de acuerdo al nivel escolar de los estudiantes. De esta manera, el concepto de área implica procesos que van más allá de la simple utilización de la fórmula.

El trabajo de Castro, Flores y Segovia (1997) menciona que la enseñanza del cálculo de áreas de superficies geométricas se hace con base en las medidas de las longitudes de estas figuras. Esto supone un peligro para la enseñanza de este objeto matemático, pues se considera la superficie como una magnitud que se deriva de la longitud; además, la comprensión de superficie se reduce al cálculo y a la mera aplicación de fórmulas. Los autores también hacen referencia a que el cálculo de área depende de la forma geométrica que se ha elegido como unidad de superficie, principalmente un cuadrado, lo cual es una elección práctica que les sirve a los estudiantes para resolver problemas generales. Las conclusiones dejan ver algunos aspectos relevantes, por ejemplo:

- la necesidad de trabajar en forma paralela tanto aspectos geométricos como medidas de superficies (tomando como unidades de medida el cuadrado y el triángulo) así como su relación, buscando promover el razonamiento analógico, dado que este es considerado un potente método para el descubrimiento matemático.
- el uso de fórmulas para el cálculo de área esconde conceptos matemáticos diversos, necesarios precisar y trabajarlos durante la enseñanza secundaria. Sugieren que el concepto de superficie debe abordarse antes de algebrizar el empleo de las fórmulas.

Luelmo (2001) explica la importancia social de la medida (la cual se relaciona con el cálculo de áreas), marcando las dificultades de su aprendizaje y los insuficientes resultados que se obtienen durante su enseñanza. Señala que es necesario abordar la evolución histórica del concepto ligada a necesidades humanas y sociales, la realización directa de mediciones y su imbricación en contextos significativos para el alumnado. Menciona, además, que los profesores le suelen dedicar tiempo al desarrollo de este tema y, a pesar de ello, los estudiantes no siempre relacionan adecuadamente el concepto de área con otros implicados en cursos superiores (por ejemplo, con integral definida, o cuando asignan un valor negativo a la medida de una superficie). En este sentido, sugiere la realización de tareas que involucren e integren diferentes contenidos de matemática, donde los alumnos puedan medir, estimar y manipular datos en contextos reales y cotidianos.

Godino, Batanero y Roa (2002) consideran necesarios los conocimientos didácticos del profesor para abordar la medida de magnitudes, resaltando aspectos como orientaciones curriculares, el desarrollo cognitivo y progresión del aprendizaje, y las situaciones y recursos que se requieren para la organización de la clase. Señalan que un problema en la enseñanza de las medidas es que con frecuencia las palabras áreas y superficies son utilizadas de manera indistinta, y es necesario distinguir los conceptos, aunque se relacionan. Sugieren que la palabra superficie se reserve para designar la forma del cuerpo o figura, mientras que la palabra área debería designar la extensión de la superficie, donde el rasgo o característica de los cuerpos que se mide cuantitativamente es el área o extensión.

En cuanto a la enseñanza del cálculo de áreas de figuras compuestas, hay poco reportado en la literatura. Sin embargo, trabajos recientes como el de Jiménez-Gestal y Blanco (2017) presentan una propuesta en la que es posible utilizar el teorema de PICK y las tramas cuadradas. Esto es un recurso para que los estudiantes determinen el área de cierto tipos de figuras, entre ellas unas que necesitan ser descompuestas para encontrar la medida de su superficie, tales como las que se muestran en la Figura 4.

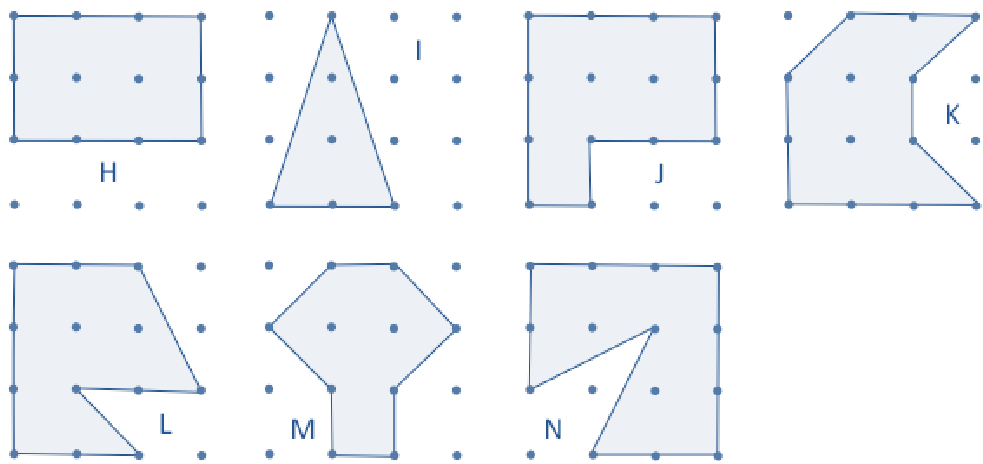


Figura 4: Tipos de figuras para el cálculo de área en Jiménez-Gestal y Blanco (2017, p. 15)

Así como existen diferencias entre los conceptos de superficie y área, algunos autores realizan la distinción entre figura y dibujo. Para Parzysz (1988), la figura es un objeto geométrico descripto por el texto que la define, mientras que el dibujo es una representación de este objeto. La diferencia se encuentra en que un dibujo nos está mostrando ciertas relaciones que guardan relación con los conocimientos que un sujeto tiene sobre ella. Esto explica por qué, a veces, los estudiantes infieren de un dibujo ciertas propiedades que no forman parte de la figura que están dibujando. Por ejemplo, el dibujo de un triángulo rectángulo con la hipotenusa paralela o coincidente con los bordes de la hoja lleva a pensar que la figura no tiene ángulo recto. Asimismo, el dibujo de un cuadrado con sus diagonales paralelas o perpendiculares a los bordes de la hoja induce a pensar que la figura no es un cuadrado, sino más bien un rombo. Tener en cuenta la diferencia entre dibujo y figura puede resultarnos didácticamente útil para:

a) cuestionarnos si la representación de un objeto geométrico (dibujo) permite ver todas las propiedades que caracterizan la figura (cuáles sí y cuáles no);
b) advertir que es imposible que un dibujo contenga todas las relaciones que caracterizan a la figura involucrada en el problema;
c) discriminar las relaciones que se infieren del dibujo (imagen perceptiva) de las que son efectivamente propiedades de la figura o cuáles no lo son.

10.4. Indicadores de idoneidad epistémica para la valoración de problemas de cálculo del área de figuras compuestas

Proponemos, a continuación, un conjunto de indicadores que permitirán valorar la idoneidad epistémica de las tareas que involucran el cálculo de áreas de figuras compuestas. Estos indicadores son una adaptación y adecuación de los que propone Godino (2013), para valorar la idoneidad epistémica de procesos de enseñanza y aprendizaje.

Es de destacar que los criterios de idoneidad epistémica que propone el EOS para cada componente son enunciados que sirven para cualquier objeto matemático en estudio. No obstante, al tener un objeto matemático definido (en nuestro caso, el cálculo del área de figuras compuestas), se hace necesario especificar cada indicador. Para ello, se recurrió a una revisión de las investigaciones en didáctica de la matemática que abordan el objeto de estudio y algunos documentos curriculares. En ellos, se especifican los tipos de situaciones problemas que serían apropiadas para trabajar con estudiantes que inician el estudio del cálculo de área de figuras compuestas, los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados al nivel cognitivo, como así también el tipo de argumentaciones y lenguaje que deberían estar utilizando en las resoluciones.

La decisión de elegir los lineamientos curriculares obedece al hecho de que en ellos se presentan acuerdos de una comunidad académica, basados en revisiones bibliográficas e investigaciones sobre el significado institucional de referencia para cada objeto matemático en particular. De alguna manera, los lineamientos curriculares contienen algunas especificaciones más precisas sobre los indicadores de la idoneidad epistémica que debería tener el significado intitucional de referencia.

Remarcamos que no se están modificando los indicadores de idoneidad epistémica que propone el EOS, sino más bien operativizándolos para un objeto matemático particular, que permitirá la valoración de las tareas que podríamos proponer en una secuencia didáctica o al seleccionarlas de un libro de texto.

En cuanto a las situaciones-problemas, el EOS les otorga un papel central (ellas permiten que se utilicen el resto de los objetos primarios) y, por tanto, para alcanzar una alta idoneidad epistémica se requiere la elección y adaptación de tareas matemáticamente ricas (Godino, 2013). Esto implica que esas tareas deben estar contextualizadas y desafiar cognitivamente a los estudiantes, permitiendo la ejercitación, la exploración y la aplicación.

En cuanto al tema del calculo de área, regularmente se le otorga mayor relevancia a la asignación númerica, pero en realidad este es apenas un subproceso del complejo proceso de medición, donde no necesariamente se debe designar un número para decir que hubo medición (MEN, 1998). De esta forma, recobran importancia la estimación, la asignación de la unidad de medida, el rango de la magnitud y el transfondo social de la medida.

En cuanto al componente del lenguaje, consideramos el uso de representaciones gráficas, verbales y simbólicas como medio para expresar y soportar el conjunto de reglas implementadas en las resoluciones de las tareas. Este tipo de representaciones son importantes, porque permiten al individuo expresar conceptos e ideas (Rico, Castro y Romero, 2000). Igualmente, el uso de estas representaciones depende en gran medida de la información que se posea sobre un concepto determinado.

Por otro lado, en Godino (2013, p. 120), se alude que “aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas”. Esto sugiere que las deficiciones que se establezcan en los textos deben ser claras, correctas y apropiadas para el año escolar al que es dirigido. Además, las situaciones planteadas deben permitir que se las relacione con deficiciones, propiedades y procedimientos, de manera que se puedan seguir diferentes rutas para llegar a la solución.

En Itzcovich (2005), se alude que los problemas en geometría se caracterizan porque ponen en juego una variedad de propiedades de los objetos geométricos, y el dominio de estas propiedades son herramientas que se utilizan en todo proceso deductivo. Señala que “las argumentaciones a partir de propiedades conocidas de los cuerpos y figuras producen nuevos conocimientos sobre los mismos” (Itzcovich, 2005, p.13). De alguna manera, este autor establece una relación entre objetos primarios que no solo posibilitan la resolución de la situación, sino también la emergencia de nuevos conocimientos acerca del objeto de estudio.

Como se ha resaltado, un aspecto importante está realcionado con la necesidad de solicitar argumentos en las situaciones que se plantean. Itzcovich (2005) propone algunos problemas para ejemplificar, en ellos se requiere comparar medidas de áreas de superficies sin medirlas directamente, haciendo necesario interpretar las relaciones que sugiere el cálculo de las áreas de las figuras que aparecen, de manera que los argumentos deductivos son los que permiten determinar finalmente la solución de la situación.

Teniendo en cuenta lo descrito anteriormente, en la Tabla 1, se muestran los indicadores generales de idoneidad epistémica tal como son planteados por el EOS y, bajo el epígrafe de “criterios específicos”, se describen los indicadores específicos que proponemos.

Tabla 1: Componentes e indicadores de idoneidad epistémica para el cálculo de área de figuras compuestas

Componente	Criterios
Situaciones-problemas	*Criterios generales* ▪ Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. ▪ Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización). *Criterios específicos* Se deberían abordar problemas en los que la asignación numérica de la medición sea vista como un subproceso del proceso de medición, lo cual implica el planteamiento de: ▪ Situaciones donde se requiere realizar la estimación de la medida de ciertas superficies. ▪ Situaciones que permitan trabajar con unidades de medidas apropiadas para el rango de esta magnitud. ▪ Situaciones que posibiliten explorar diferentes técnicas y procedimientos para la medición de las superficies. ▪ Situaciones que requieran realizar el proceso medición de superficies con trasfondo social dominable para el estudiante.
Lenguaje	*Criterios generales* ▪ Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos. ▪ Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. ▪ Propuesta de situaciones de expresión matemática e interpretación. *Criterios específicos* ▪ Se promueve la utilización de representaciones gráficas, simbólicas y verbales en la resolución de las tareas.

Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	*Criterios generales* ▪ Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. ▪ Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. ▪ Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos. *Criterios específicos* ▪ Se presentan con claridad los términos de área y superficie en el planteamiento de las situaciones. ▪ Se requiere el dominio e identificación de propiedades de las figuras planas y cuerpos geométricos necesarios para calcular la medida de sus superficies. ▪ Se necesita el reconocimiento de los atributos específicos de las figuras y cuerpos geométricos, como número de lados, ángulos, número de caras iguales para el cálculo de sus áreas. ▪ Se suscita la exploración de distintos caminos para solucionar las situaciones que involucran la medida de superficies. ▪ Se plantean situaciones donde se requiera hallar la medida de superficies de diferentes figuras, poniendo en juego definiciones y propiedades de las mismas. ▪ Se componen y descomponen cuerpos geométricos para realizar las medidas de su superficie exterior.
Argumentos	*Criterios generales* ▪ Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. ▪ Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar. *Criterios específicos* ▪ Se solicitan explicaciones y comprobaciones de los procedimientos realizados para calcular el área de una figura compuesta. ▪ Se requieren descripciones y explicaciones de los métodos empleados al calcular el área de la superficie exterior de cuerpos geométricos.
Relaciones	*Criterios generales* ▪ Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. ▪ Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas. *Criterios específicos* ▪ Se corresponde el concepto de área de figuras compuestas con las propiedades, procedimientos, argumentos y el lenguaje puesto en juego en la resolución de las situaciones.

10.5. Problemas para el cálculo del área de figuras compuestas

Proponemos, a continuación, una selección de problemas que se ajustan al marco epistémico y didáctico de referencia descripto anteriormente, por considerarlos con un alto potencial matemático. Para determinar el potencial matemático de una tarea tuvimos en cuenta los indicadores que establecen Barreiro *et al* (2017, p. 27), entre ellos: “las *posibilidades de exploración* que la consigna habilita o no y las *posibilidades de argumentar* sobre la validez de la resolución o de la respuesta”.

Consideramos valioso que una consigna pueda admitir diferentes posibilidades de exploración y argumentación, porque le permitiría al estudiante tomar decisiones, organizar sus intentos o modos para abordar la resolución, recurrir a heurísticas o utilizar distintas habilidades generales matemáticas, reflexionar sobre sus intentos para sostenerlos o descartarlos, establecer una manera de explicar el porqué de la respuesta y validar las conjeturas que emergen del proceso.

Para las instancias de resolución de problemas, se asume que el docente gestionará la clase teniendo en cuenta algunos criterios que establecen Barreiro *et al* (2017):

- Evitar dar más información que la estrictamente puesta en juego en la pregunta/respuesta del estudiante,
- Intervenir desde la lógica que siguió el estudiante y no desde la que el docente tiene pensada la resolución experta del problema,
- Estimular en el estudiante el desarrollo de estrategias de autocontrol,
- Evitar realizar intervenciones solo cuando lo que el estudiante hizo está mal,
- Pedir explicaciones aun cuando la respuesta dada por el estudiante sea correcta.

Este modo de gestionar la clase tiene por propósito alentar los procesos de argumentación y que los estudiantes puedan conjeturar, demostrar y validar. A su vez, se busca que sea el estudiante quien llegue al conocimiento a través de sus propias conclusiones y no por medio de un conocimiento aprendido.

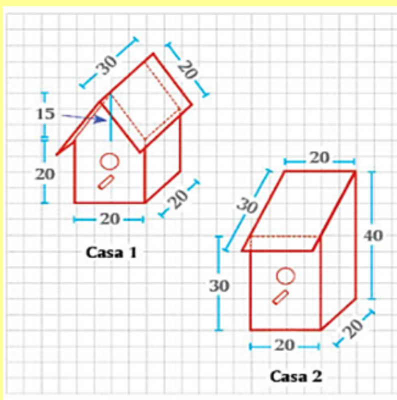
Lo mencionado anteriormente muestra que, además de proponer actividades para la clase, es importante generar orientaciones para el profesor y así favorecer sus prácticas cuando aborde temas como el de cálculo de áreas, con la intención de minimizar el abuso del lenguaje y los errores didácticos que obstaculizan el proceso.

Para cada situación problema que presentamos, describimos un posible camino de resolución que podría realizar el estudiante. En la descripción señalamos algunos de los objetos primarios (situaciones, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje) que se ponen en juego.

El primer problema es una adaptación, a los principios enunciados en este trabajo, de una actividad propuesta por Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser (2015, p. 44).

Problema 1

Se van a construir dos modelos de casas para pájaros, con las medidas que muestra la ilustración. Para ello, se empleará una hoja de madera Triplay que mide 122 cm × 244 cm.



a) Antes de hacer los cálculos, estima si la hoja de Triplay será suficiente para construir las dos casas. Fundamenta tu respuesta.

b) Determina el costo que se tendría en madera para construir ambas casas. Explica los procedimientos que usaste.

Estimar si el Triplay de medidas $122\ cm \times 244\ cm$ es suficiente para construir las casas de pájaros, supone que el estudiante razone poniendo en juego sus habilidades para dar una respuesta cercana al resultado exacto (*argumento* basado en el procedimiento). Esto requerirá tener presente todas las partes constitutivas de cada casa de pájaro, pensando que se tiene un dibujo plano que representa un cuerpo tridimensional.

La casa 1 requiere de 7 piezas, las mayores se pueden ver como rectángulos cuyas medidas son de $30\ cm \times 20\ cm$ y $35\ cm \times 20\ cm$. No obstante, los dos laterales, por tener $20\ cm \times 20\ cm$, conforman una pieza de $20\ cm \times 40\ cm$. La casa 2, en tanto, requiere de 6 piezas; la mayor es un rectángulo de $40\ cm \times 20\ cm$. Hasta ahora tendríamos que obtener 12 piezas de $40\ cm \times 20\ cm$. Si consideramos que las bases de ambas casas de pájaros son de $20\ cm \times 20\ cm$, también conforman una pieza de $20\ cm \times 40\ cm$. En síntesis, nos alcanzarían 11 trozos de $20\ cm \times 40\ cm$ para las 13 piezas que se requieren.

Si disponemos las piezas de $20\ cm$ de ancho sobre el lado del Triplay que mide $122\ cm$, logramos ubicar 6 de ellas y a lo sumo, ocupamos $40\ cm$ del largo (tenemos $244\ cm$ en total). Con el mismo procedimiento, ubicamos 6 piezas más y nos quedaría una más para totalizar las 13 piezas de las dos casas. Esto nos lleva a ocupar mucho menos de la mitad de la hoja de Triplay (Figura 5).

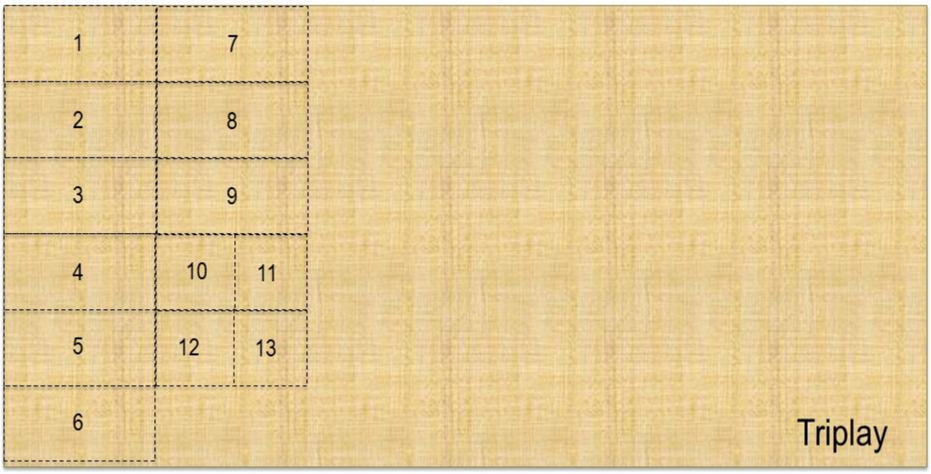


Figura 5: Estimación de madera en lámina de Triplay

Para determinar el costo de madera es necesario determinar la cantidad de Triplay necesario para construir cada una de las casas. Esto nos lleva a calcular el área de cada una de las partes (base y caras) que la conforman. Entonces, el área de la casa 1 es:

$$A_1 = 2(20 \cdot 30) + 3(20 \cdot 20) + 2\left[(20 \cdot 20) + \left(\frac{20 \cdot 15}{2}\right)\right]$$

Luego,

$A_1 = 1200 + 1200 + 100 \rightarrow A_1 = 3500\ cm^2$ (*concepto y procedimiento* área de figuras planas).

El área de la casa 2 es:

$$A_2 = (20 \cdot 20) + 3(30 \cdot 20) + 2\left[(20 \cdot 30) + \left(\frac{10 \cdot 20}{2}\right)\right]$$

Luego:

$A_2 = 400 + 1800 + 1400 \rightarrow A_2 = 3600\ cm^2$ (*concepto y procedimiento* área de figuras planas).

Si analizamos con detenimiento las figuras involucradas, vemos que la cara frontal de la casa 1 es un pentágono irregular y, para obtener su área, es preciso dividirlo en polígonos más sencillos, cuyas áreas se puedan calcular con la información dada en la figura. Uno de los caminos es partir el pentágono en un cuadrado de lados $20\ cm$ y en un triángulo de base, $10\ cm$ y altura $20\ cm$. Luego, el área en cuestión resulta de sumar las áreas de estas dos figuras (*argumento* basado en el procedimiento).

En cuanto a las caras laterales de la casa 2, se observa que dos de ellas tienen forma de trapecio. Si bien hay una fórmula para hallar su área, un camino posible es partirlo en dos polígonos: un rectángulo de $20\ cm \times 30\ cm$ y un triángulo de base 10 cm y altura 20 cm. De esta manera, la suma de sus áreas resulta ser el área del trapecio que representa una de las caras de la casa (*argumento* basado en el procedimiento).

Determinar el costo de la madera utilizada puede hacerse de varias maneras. Un posible camino es hacerlo con proporciones (regla de 3 simple, la cual involucra un *concepto* y un *procedimiento*). Con certeza los estudiantes querrán conocer el costo del Triplay completo, pues les resulta más fácil dar un valor numérico para el costo y no una proporción. En nuestro caso, se emplean $3500\ cm^2 + 3600\ cm^2 = 7100\ cm^2$ sobre un total de $29768\ cm^2$ que tiene el Triplay, lo cual representa un $23{,}85\%$ del costo de la lámina completa, sin considerar los desperdicios. Aproximadamente podemos considerar un 25% del valor que tiene el Triplay.

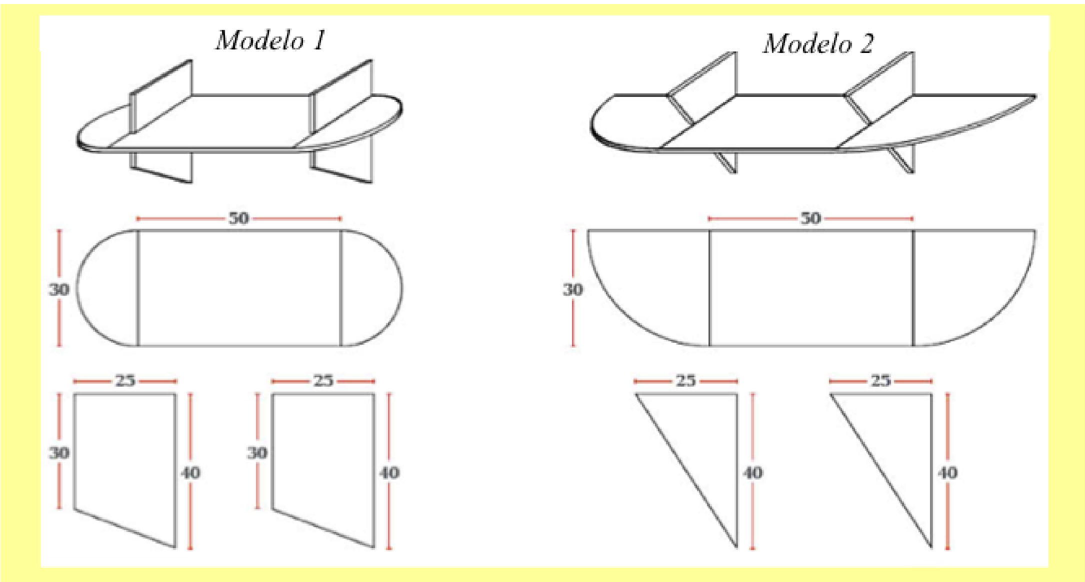
El segundo problema también es una adaptación, a los principios enunciados en este trabajo, de una actividad propuesta por Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser (2015, p. 44).

Problema 2

A un carpintero le han pedido que presente presupuestos de varios modelos de repisas de madera. Los modelos son los que muestra la ilustración, donde las medidas están dadas en centímetros.

a. Antes de hacer los cálculos, estima cuál modelo de repisa requiere más madera. Fundamenta tu respuesta.

b. ¿Ambos modelos de repisa tendrían el mismo presupuesto? ¿por qué sí o por qué no? Explica tus respuestas.



Estimar cuál de los dos modelos requiere más o menos cantidad de madera para su construcción, dará lugar a *argumentos* basados en los procedimientos que realice el alumno. Ambas repisas pueden pensarse como la composición de figuras más simples (*procedimiento*). Así, por ejemplo, el modelo 1 y 2 comparten un rectángulo de iguales dimensiones $(30\ cm \times 50\ cm)$ y los soportes del modelo 2 devienen de hacer una división de un soporte del modelo 1. Por otra parte, el modelo 1 tiene una semicircunferencia en los extremos de radio $15\ cm$ y puede pensarse que está contenida en el cuarto de circunferencia, de radio $30\ cm$, del modelo 2. En consecuencia, el estante del modelo 2 tiene más madera que el del modelo 1, pero los soportes del modelo 2 requieren menos madera que los del 1.

Llegado a este punto habrá que tomar decisiones. Por ejemplo, la circunferencia de radio $15\ cm$ tiene aproximadamente la misma área que un cuarto de circunferencia de radio $30\ cm$ y los estantes del modelo 2 pueden formarse haciendo una descomposición de los estantes del modelo 1. En la Figura 6, pueden correlacionarse las figuras con igual color, estimando que tienen la misma área.

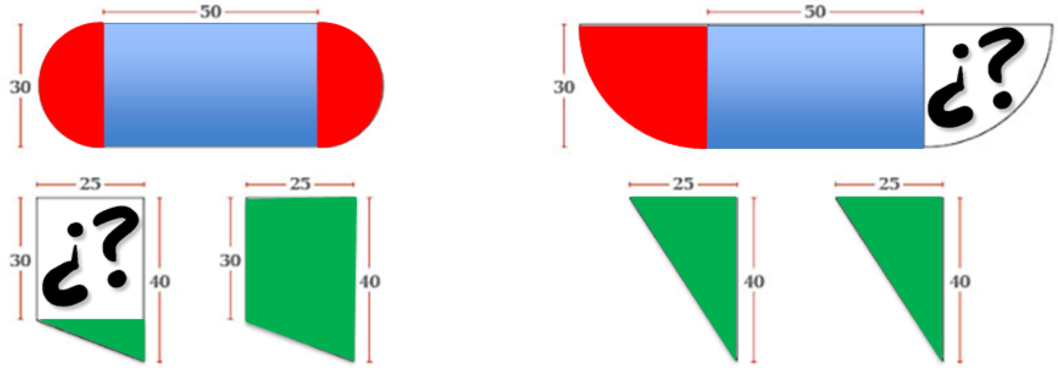


Figura 6: Descomposición de figuras y comparación de áreas

Queda por discernir si un rectángulo de $30\ cm$ y $25\ cm$ tiene menor, mayor o igual área que un cuarto de círculo de radio $30cm$ (marcados con signos de interrogación en la Figura 6). Se puede argumentar que el rectángulo tiene área mayor, pues podemos hacer una partición del cuarto de círculo para que quede contenido en él y nos sobraría espacio. Esto nos lleva a decir que el modelo 1 requiere de mayor cantidad de madera que el modelo 2.

Nos queda por hacer los cálculos para establecer la cantidad de madera que requiere cada modelo. Notemos que el primer modelo está conformado por un rectángulo de $50\ cm \times 30\ cm$, dos medios círculos de diámetro $30cm$ y dos trapecios de altura $25\ cm$ y bases $30\ cm$ y $40\ cm$. El área del modelo 1 resulta de sumar las áreas de estos polígonos

$$A_1 = (50 \cdot 30) + (\pi \cdot 15^2) + 2 \cdot 25\left(\frac{30+40}{2}\right)$$

Luego, $A_1 = 3956.9\ cm^2$ (*concepto y procedimiento* área de figuras planas).

En cuanto al modelo 2, está conformado por un rectángulo de $50\ cm \times 30\ cm$, dos cuartos de círculo de radio $30\ cm$ y dos triángulos con base $25\ cm$ y altura $40\ cm$. Entonces:

$$A_2 = (50 \cdot 30) + 2\left(\frac{\pi \cdot 30^2}{4}\right) + 2\left(\frac{25 \cdot 40}{2}\right)$$

De donde tenemos que $A_2 = 3913.7\ cm^2$ (*concepto y procedimiento* área de figuras planas). Con ambos resultados, podemos argumentar que efectivamente el primer modelo requiere mayor cantidad de madera.

Para el segundo ítem, hay que argumentar sobre los presupuestos y las respuestas serán variadas. Se podrá argumentar que la diferencia en la cantidad de material no es significativa para establecer presupuestos diferentes, en tanto el modelo 1 requiere un 1.1% más de madera que el modelo 2.

Para quienes sostengan que es necesario establecer diferencias en los presupuestos, los argumentos podrán ser variados. Por ejemplo, apelar a la diferencia de cantidad de material y establecer que el presupuesto del modelo 1 debiera ser un 1.1% (o más) superior al del modelo 2.

Otro argumento es pensar en desperdicios de madera, imaginando que requerimos piezas rectangulares para cada una de las piezas que conforman los modelos. Para el modelo 1, se requeriría de una tabla de

$80\ cm \times 30\ cm$ para el estante y dos tablas de $25\ cm \times 40\ cm$ para los soportes; esto hace un total de $4400\ cm^2$ de madera.

Para el modelo 2, en tanto, se requeriría de una tabla de $110\ cm \times 30\ cm$ para el estante y una de $25\ cm \times 40\ cm$ para los soportes, la cual se podrá dividir en dos, a través de la diagonal del rectángulo. Esto hace un total de $4300\ cm^2$ de madera.

Nuevamente, la diferencia no es significativa y sigue siendo el modelo 1 el que demanda mayor cantidad de material para su construcción.

El tercer problema resulta ser una adaptación de una actividad propuesta por Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser (2015, p. 45).

Problema 3

Para fabricar calendarios de escritorio, como el de la ilustración, una imprenta dispone de pliegues de cartón de 70 cm × 95 cm. ¿Cuántos calendarios podrá hacer si quiere tener el mínimo desperdicio? Fundamenta tu respuesta.

Para la resolución, un estudiante puede proceder a dibujar el pliego de cartulina a escala (*lenguaje* gráfico) y buscar disponer el desarrollo plano del calendario. Hay que tener presente que será necesario tener en cuenta el solapado que se requiere para armar el calendario. Podemos pensar que el solapado es mínimo, razón por la cual anexamos $1\ cm$ en el largo del desarrollo plano o despliegue del calendario, como se muestra en la Figura 7.

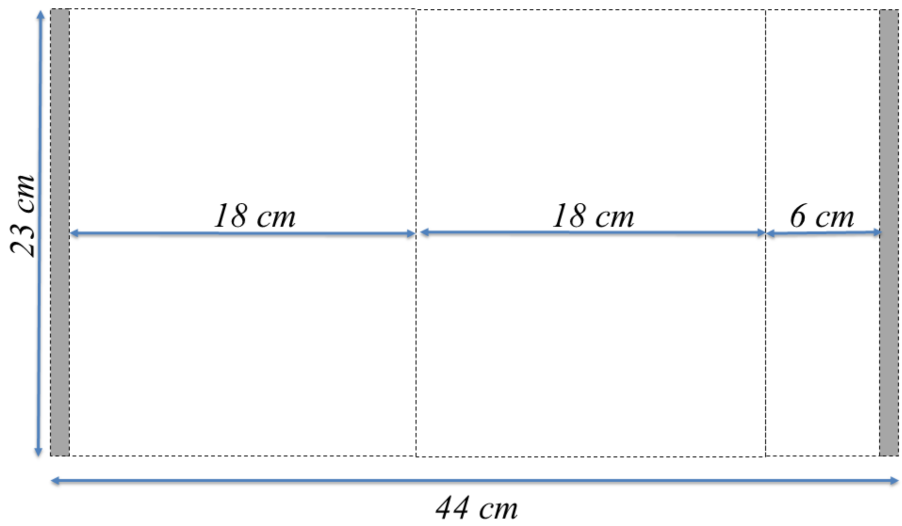


Figura 7: Despliegue del calendario

Determinar la cantidad de calendarios que salen de un pliegue de cartón, podemos hacerlo de varias maneras. Por un lado, a través del cálculo de áreas, aunque esto no garantiza que efectivamente puedan ser cortados. Siguiendo este camino, tenemos que el pliego de cartulina tiene la siguiente medida de superficie:

$$A = 70\ cm \times 95\ cm = 6650\ cm^2$$

Por otra parte, el pliego del calendario tendrá la siguiente medida de área:

$$A_c = 23\ cm \times 44\ cm = 1012\ cm^2$$

Si llevamos a cabo el procedimiento de división, $6650\ cm^2 \div 1012\ cm^2 \cong 6.57$, encontramos que pueden sacarse 6 calendarios y se desperdicia un poco más de la mitad de uno (*concepto y procedimiento* área de un rectángulo). No obstante, este argumento es insuficiente, porque se requiere mostrar que los seis calendarios efectivamente pueden ser cortados del pliegue de cartón. Será necesario advertir, por ejemplo, que de los $70\ cm$ que tiene un lado del pliegue del cartón, pueden disponerse tres anchos de $23\ cm$ del calendario. De los $95\ cm$ del largo del pliegue de cartón, fácilmente se pueden colocar dos largos del calendario de $44\ cm$. En consecuencia, sí podemos recortar los 6 calendarios que anticipaba el cálculo realizado.

Otra manera de hacer la estimación de calendarios es efectuando dibujos a escalas del pliegue de cartón y el modo en que podrían ser cortados (Figura 8).

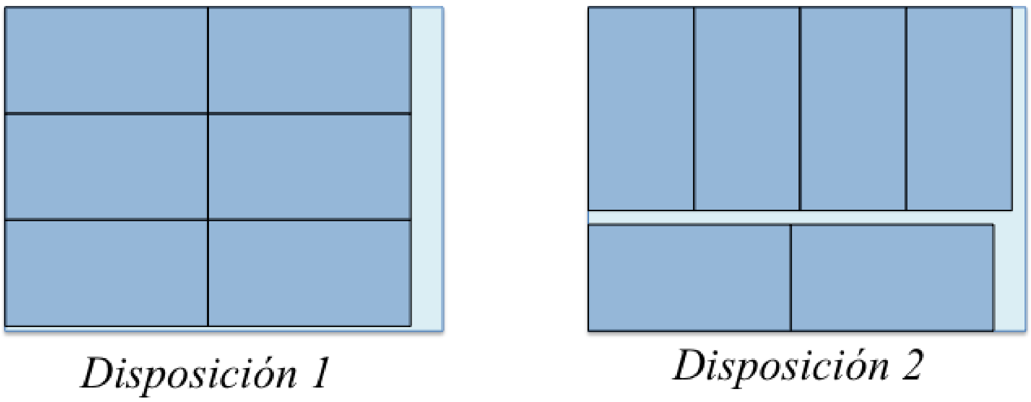


Figura 8: Diferentes disposiciones de corte del pliegue de cartón

Pasemos ahora al problema cuatro, diseñado para explorar en un ambiente de geometría dinámica y se puede clasificar como no rutinario, en tanto la información que se suministra o bien es insuficiente o hay datos que sobran, no existe un único camino para abordarlo y por lo tanto, se ponen en juego distintas estrategias de resolución. Asimismo, pueden existir varias soluciones o bien no tener solución alguna.

Problema 4

Establecer diferentes estrategias para calcular el área de un cuadrilátero no clasificable. Fundamentar la respuesta.

Al tratarse de un cuadrilátero no clasificable, se nos informa que no es una figura conocida como el rectángulo, cuadrado, rombo, trapecio, romboide, entre otros (*conceptos*). En consecuencia, una primera estrategia será descomponerlo en figuras más simples, empleando los procedimientos que describen Wentworth y Smith (2000). Esto es, descomponer al cuadrilátero en figuras sencillas (dos triángulos, en nuestro caso).

Por tanto, tomamos un cuadrilátero $ABCD$ cualquiera (aunque no deja de ser un caso particular) al que le trazamos la diagonal mayor $\overline{BD}$ (también podría haber sido la menor). Posteriormente, determinamos las alturas de los dos triángulos que quedan conformados, como puede apreciarse en la Figura 9.

Entonces, el cálculo de la medida del área se reduce a calcular el área de dos triángulos que comparten la base y tienen alturas diferentes (*concepto y procedimiento*). Llegado a este punto, resulta relevante debatir sobre la posibilidad de conocer las longitudes que requerimos, pensando que podría tratarse de una situación real, como por ejemplo, área de un campo. Si bien el procedimiento puede ser adecuado al realizarlo en una hoja de papel, se vuelve más difícil cuando la figura deviene de contextos reales (bosque, campo, etc.).

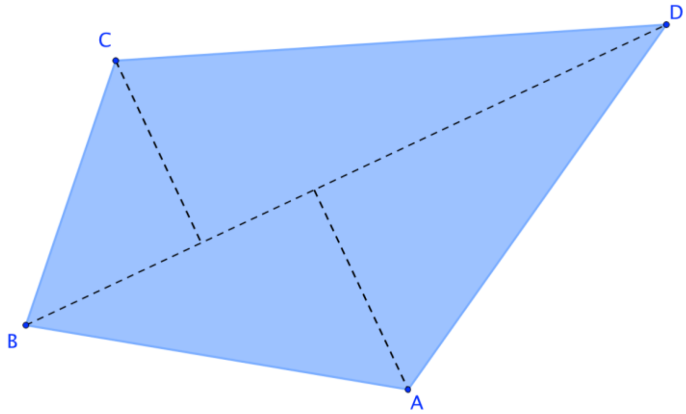


Figura 9: Descomposición de un cuadrilátero en dos triángulos

También podría calcularse el área de los dos triángulos empleando la fórmula de Herón, en tanto requiere conocer solamente la medida de sus lados. En este caso, tendríamos que determinar las longitudes de los lados del cuadrilátero y de una diagonal (procedimientos). Nuevamente queda por determinar si resulta más práctico determinar la diagonal mayor o la menor (en caso de ser diferentes), si se trata de un problema en contexto de la realidad.

Continuemos pensando en estrategias de cálculo para la medida del área de un cuadrilátero. Podemos usar una propiedad de los triángulos, la cual establece que “si dos triángulos comparten la misma base y la misma altura, aunque no tengan la misma forma, tendrán la misma área”. Trazar una recta paralela a la diagonal $\overline{BD}$ que pase por el punto C del cuadrilátero $ABCD$, nos permite construir un conjunto de triángulos con áreas equivalentes (Figura 10).

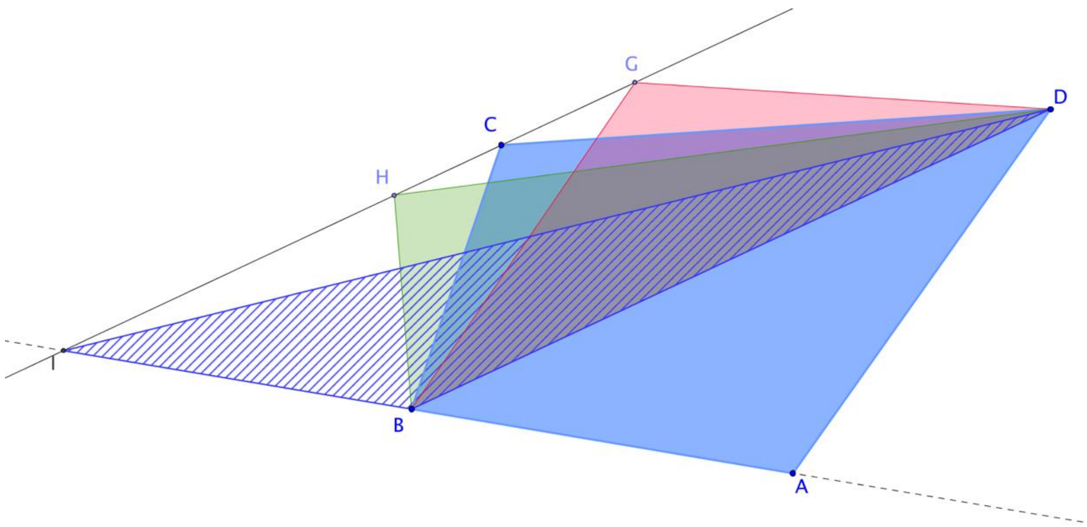


Figura 10: Triángulos con la misma base y altura sobre la diagonal del cuadrilátero

Consideremos el triángulo con vértice en el punto I, el cual es la intersección entre la recta que contiene al lado $\overline{AB}$ y la paralela a la diagonal $\overline{BD}$ que pasa por el punto C del cuadrilátero $ABCD$. Este triángulo, el IAD, tiene el lado $\overline{IB}$ sobre la misma recta que contiene al $\overline{AB}$. Por tanto, el triángulo IAD tiene la misma área que la del cuadrilátero $ABCD$. Si bien la estrategia puede resultar poco práctica en la resolución de un problema del entorno cotidiano, no podemos desestimar la riqueza matemática que involucra.

Las posibilidades de exploración del problema son amplias, como puede advertirse. Podríamos encontrar un triángulo isósceles que tenga la misma área del triángulo IAD y, a continuación, el rectángulo que sea equivalente en área. Con este procedimiento hallaríamos un rectángulo con área equivalente a la del cuadrilátero $ABCD$.

En la Figura 11 hemos buscado el punto medio K del segmento $\overline{IA}$ y trazamos la mediatriz (*concepto* y *procedimiento*). Posteriormente, trazamos la recta paralela a $\overline{IA}$ que pasa por el punto D. La intersección de esta recta con la mediatriz de $\overline{IA}$ determina el punto L.

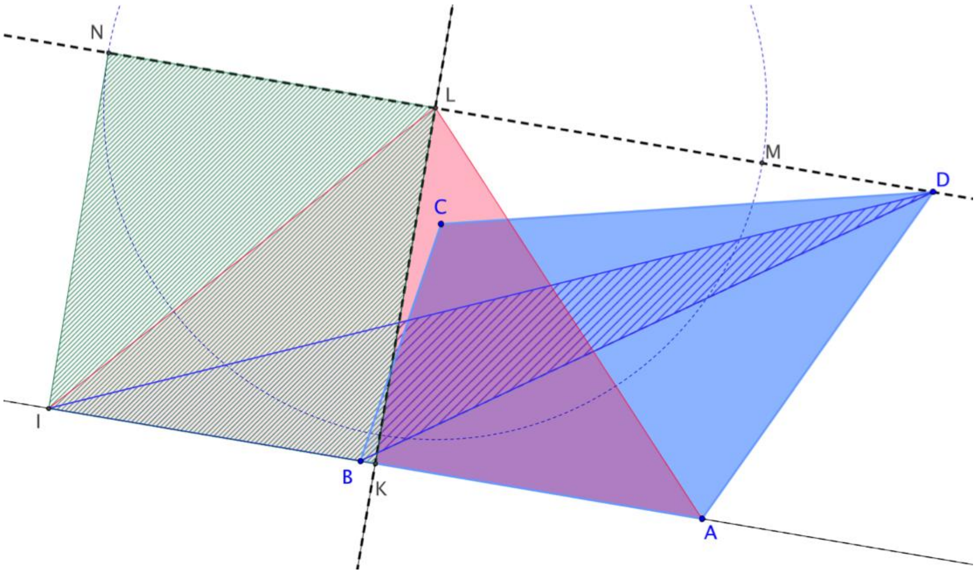


Figura 11: Rectángulo, triángulo isósceles y cuadrilátero con áreas equivalentes

El triángulo isósceles IAL (*concepto*) tiene la misma área del triángulo IAD y del cuadrilátero $ABCD$ (*argumento*). Trazando la perpendicular al segmento $\overline{IA}$ (*concepto y procedimiento*), se interseca a la recta paralela en el punto N. Así resulta que el rectángulo $IKLN$ tiene la misma área que el triángulo isósceles IAL y el cuadrilátero $ABCD$.

10.6. Reflexiones finales

Pensamos que haber establecido criterios de idoneidad epistémica para la valoración de las tareas, referidas a cálculo de áreas de figuras compuestas, le permitirá a un profesor diseñar o reformular actividades de clases adecuadas no solo desde el punto de vista didáctico, sino también epistemológico.

Creemos que hemos logrado mostrar, a lo largo del capítulo, una alternativa para trabajar el cálculo de áreas de figuras compuestas. En particular destacamos que, en las situaciones problemas que presentamos, la actividad matemática no se reduce al uso algorítmico de fórmulas (aspecto muy criticado en las investigaciones sobre el tema), sino más bien se buscó trabajar con relaciones entre conceptos, propiedades y procedimientos matemáticos, con procesos relevantes como la exploración, estimación e intuición.

En este sentido, es preciso resaltar que este tema en particular de la geometría invita a poner en juego tareas en contextos diversos, relacionadas con el entorno cotidiano del estudiante y con un alto potencial matemático. Solo se requiere de un profesor que redescubra el poder que tiene la geometría para plantear buenos problemas en la clase de matemática.

10.7. Referencias bibliográficas

Ángeles, J., Guerrero, R., Loyola, E. y Preisser, R. (2015). *Matematicas 2, habilidades y competencias.* México, D.F.: Ángeles Editores S.A.

Baldor, J. (2004). *Geometría plana y del espacio y trigonometría.* México,D.F.: Grupo Patria Cultural, S.A.

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática*. Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS.

Castro, E., Flores, P. y Segovia, I. (1997). Relatividad de las fórmulas de cálculo de superficies de figuras planas. *Suma, 26*, 23-32.

Corberán, R. (1996). *El área: recursos didácticos para su enseñanza en Primaria.* Disponible en: http://www.kekiero.es/area/ElArea.pdf.

Flores, P. (2002). Superficies y áreas. Granada, España: Universidad de Granada. Disponible en http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Propuestas/Praxissuperfi.pdf

García, S. y López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría*. Médico, D.F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros.* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada .

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA, 45*, 17-28.

INFD (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Instituto Nacional de Formación Docente y SPU.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construciones a las demostraciones.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Jiménez-Gestal, C. y Blanco, L. (2017). El teorema de PICK como pretexto para la enseñanza de la Geometría con Estudiantes para Maestro. *Números, 94*, 7-21.

Marmolejo, G. y González-Astudillo, M. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 10* (1), 45-57.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Serie lineamientos curriculares.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Oliver , M., Rocerau , M., Valdéz , G., Vilanova , S., Medina , P., Astíz , M. y Laviada , M. (2003). Análisis del tratamiento de algunos temas de geometría en textos escolares para el tercer ciclo de la Educación General Básica. *Revista Iberoamericana de Educación, 31*(1), 1-8.

Luelmo, M. (2001). Medir en Secundaria: algo más que fórmulas. En FESPM (Ed.), *X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, (pp. 727-737). Zaragoza, España: Universsidad de Zaragoza.

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19,* 79-92.

Rich, B. & Thomas, C. (2009). *Geometry*. New York, USA: Schaum’s Outline Series.

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras númericas . En J. Beltrán (Edt.), *Intervención psicopedagógica y curriculum escolar* (pp. 153-182). Madrid, España: Pirámide.

Struik, D. (1998). *Historia concisa de las matemáticas.* México, D.F.: Consejo Editorial del Instituto Politecnico Nacional.

Wentworth, J. y Smith, E. (2000). *Geometría plana y del espacio.* México, D.F.: Editorial Porrua .